

Titre: Application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des problèmes d'interactions fluide-structure en axisymétrie
Title:

Auteur: Dominique Tremblay
Author:

Date: 2005

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Tremblay, D. (2005). Application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des problèmes d'interactions fluide-structure en axisymétrie [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/7687/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7687/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche:
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

APPLICATION D'UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS ADAPTATIVE À
DES PROBLÈMES D'INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE EN
AXISYMETRIQUE

DOMINIQUE TREMBLAY
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
OCTOBRE 2005



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-16861-5

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-16861-5

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

APPLICATION D'UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS ADAPTATIVE À
DES PROBLÈMES D'INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE EN
AXISYMÉTRIQUE

présenté par: TREMBLAY Dominique

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. TRÉPANIÉ Jean-Yves, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph.D., membre

À mon père, ma mère, mes deux petites soeurs
et

À Catherine

REMERCIEMENTS

Je tiens particulièrement à remercier mon directeur de recherche Dominique Pelletier. Il a su me conseiller de façon claire et structurée à toutes les étapes importantes de ma scolarité de maîtrise. Sa culture scientifique, sa disponibilité et son aide financière ont été indispensables à la réalisation de ce projet.

Je tiens également à remercier Jean-Yves Trépanier, président du Jury, et André Garon, membre du jury, pour le temps et l'attention qu'ils me consacrent.

Je veux également remercier Stéphane pour sa vivacité d'esprit et la patience dont il a fait preuve devant mes nombreuses questions. Sans lui, le labo aurait eu une toute autre couleur ; une couleur bien terne.

Je tiens à souligner la présence de toutes les personnes que j'ai côtoyées durant mon passage au labo. Je pense à Pierre pour son grand engouement pour les mini-clips et autres divertissements. Je pense à Julien et Papatte qui ont définitivement marqué mon passage ici par leurs histoires d'un soir. Je n'oublie pas Alexander qui est toujours un adversaire de taille quand il s'agit de savoir qui jouera à la quinche. Richard et JF, deux petits nouveaux, qui prennent peu à peu le flambeau. Et finalement, Farshad lors de ces deux stages d'été et d'une bonne bière à l'auberge de la montagne.

Finalement, je voudrais remercier Catherine pour sa patience exemplaire envers mon "workaholisme" du dimanche et ma famille qui a toujours su m'encourager et croire en moi.

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une formulation monolithique générale de problèmes d'interactions fluide-structure stationnaire. On y considère un écoulement incompressible et une structure élastique qui subit de grands déplacements. Le problème complet est résolu de façon implicite en utilisant une approche pseudo-solide Newton-Raphson. Cette approche permet de lier le domaine solide au domaine fluide à l'aide d'une structure élastique sur laquelle repose le maillage fluide. La formulation utilise donc la vitesse fluide, la pression et les déplacements pseudo-solides comme inconnues dans le domaine fluide et les déplacements de la structure dans le domaine solide. Les équations sont discrétisées par des éléments quadratiques en vitesses et en déplacements et linéaires en pression. Elles sont résolues à l'aide d'une méthode d'éléments finis adaptative. On présente la formulation de l'interface qui permet une implémentation éléments finis claire et naturelle des conditions d'équilibre à l'interface fluide-solide. Cette formulation utilise des éléments qui transmettent les déplacements solides et les forces fluides entre le solide et le fluide. On vérifie l'implémentation de la formulation générale à l'aide de la méthode des solutions manufacturées. En particulier, on vérifie que le taux de convergence observé correspond à celui prédit par la théorie. On vérifie également la performance de l'estimateur d'erreur. Trois applications sont présentées par la suite. Les deux premières applications concernent un écoulement sanguin dans une artère flexible dont la paroi artérielle est caractérisée par une diminution de rigidité locale. Dans ces deux cas, on considère l'artère sans et avec des tissus avoisinants. L'objectif de ces deux simulations est de mesurer l'effet de l'inclusion d'un tissu avoisinant sur l'écoulement et les contraintes dans la paroi artérielle. La dernière application présente un modèle simplifié d'un oeil souffrant de glaucome. Nous comparons les résultats que nous avons obtenus avec ceux d'une étude numérique antérieure.

ABSTRACT

This work presents a general monolithic formulation of steady fluid-structure interactions problems. We consider an incompressible flow and an elastic structure undergoing large displacements. The entire problem is solved in an implicit manner using a Newton-Raphson pseudo-solid approach. This approach allows the fluid and solid domains to be coupled using a elastic structure on which the fluid mesh lies. Thus, the formulation uses fluid velocity, pressure and pseudo-solid displacements as unknowns in the fluid domain and solid displacements in the solid domain. The equations are discretised using quadratics elements for the velocity and displacements and linear functions for the pressure. They are solved using an adaptive finite element method. We present an interface formulation that leads to a clear and natural finite element implementation of the equilibrium conditions at the fluid-solid interface. This formulation uses interface element which transmit the fluid forces and structural displacements between the fluid and the solid. The implementation is verified on a problem with a closed form solution obtained by MSM. More precisely, we verify that the observed rate of convergence rates corresponds to the rate predicted by theory. We also the performance of the error estimator. It is then applied to three cases. The first two concern blood flow in a flexible artery exhibiting a localised region of low stiffness. In the first case, we consider the artery without surrounding tissues and in the other case, with surrounding tissues. The goal is to measure the influence of surrounding tissues on the blood flow and stresses in the arterial wall. The last case is a simplified model of a eye ball with glaucoma. We compare our results with those from previous work.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xiii
LISTE DES TABLEAUX	xvii
LISTE DES ANNEXES	xviii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES ET REVUE BIBLIO- GRAPHIQUE	4
1.1 Modélisation et résolution	4
1.2 Adaptation de maillage	9
1.3 Contribution scientifique	10
CHAPITRE 2 MODÉLISATION DU PROBLÈME FLUIDE-SOLIDE . .	11
2.1 Équations pour le fluide	11
2.2 Équations pour le solide	13
2.3 Équations pour le pseudo-solide	17

2.4	Conditions d'équilibre à l'interface fluide-solide	19
CHAPITRE 3 MÉTHODE DE RÉOLUTION		21
3.1	Notation	21
3.2	Méthode des éléments finis	22
3.3	Formulation faible des équations	23
3.3.1	Formulation faible des équations pour le fluide	23
3.3.2	Formulation faible des équations pour le solide	25
3.3.3	Formulation faible des équations pour le pseudo-solide	27
3.3.4	Couplage entre le fluide, le solide et le pseudo-solide	28
3.3.4.1	Continuité des forces	28
3.3.4.2	Continuité des déplacements solides et pseudo-solides	30
3.4	Discrétisation	30
3.5	Stratégie de résolution	32
3.6	Estimation d'erreur	40
3.6.1	Norme pour le fluide	41
3.6.2	Norme pour le solide	42
CHAPITRE 4 MÉTHODE DES SOLUTIONS MANUFACTURÉES EN INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE		44
4.1	Méthode des solutions manufacturées	44
4.2	Équations à vérifier	45
4.3	Démarche pour obtenir une solution manufacturée	48
CHAPITRE 5 VÉRIFICATION		59
5.1	Écoulement dans un tuyau flexible	59
5.1.1	Description du problème	59
5.1.2	Analyse de la convergence	71
5.2	Conclusion	76

CHAPITRE 6	APPLICATIONS	77
6.1	Artère affaiblie : avec et sans tissus avoisinants	77
6.1.1	Description du cas de l'artère isolée	78
6.1.2	Méthode des réactions modifiées	83
6.1.3	Description du cas de l'artère avec tissus avoisinants	85
6.1.4	Résultats : artère isolée vs artère avec tissus musculaires . .	88
6.2	Glaucome	99
6.2.1	Description du problème	99
6.2.2	Résultats	105
CONCLUSION	114
RÉFÉRENCES	116
ANNEXES	121

LISTE DES FIGURES

FIG. 2.1	Notation du problème fluide-solide	14
FIG. 3.1	Notation du problème fluide-solide selon la configuration. . .	22
FIG. 3.2	Élément de Taylor-Hood et d'interface.	31
FIG. 3.3	Matrice globale du problème fluide-solide	33
FIG. 3.4	Illustration du couplage implicite entre les éléments frontières à l'interface fluide-solide par l'entremise des éléments d'inter- face.	34
FIG. 4.1	Tube axisymétrique de forme quelconque	49
FIG. 4.2	Champ de vecteurs vitesse à divergence nulle.	52
FIG. 4.3	Configuration non déformée et déformée du solide.	54
FIG. 4.4	Configuration non déformée et déformée du problème fluide- solide.	55
FIG. 5.1	Tube axisymétrique sinusoïdale.	60
FIG. 5.2	Champ de vecteurs vitesse à divergence nulle.	61
FIG. 5.3	Configurations du solide.	62
FIG. 5.4	Configurations du problème fluide-solide.	63
FIG. 5.5	Distributions de viscosité et de pression à l'interface.	68
FIG. 5.6	Distributions de viscosité et de pression à l'interface avec un mauvais choix de champ de déplacements.	69
FIG. 5.7	Configuration initiale et conditions frontières.	72
FIG. 5.8	Maillages de la solution éléments finis.	73
FIG. 5.9	Vecteurs vitesse (partie du bas) et illustration du déplacement (partie du haut).	74
FIG. 5.10	Évolution de l'erreur estimée et exacte avec le maillage. . .	75
FIG. 6.1	Schéma du système artériel ^[35]	79
FIG. 6.2	Géométrie et distribution de la rigidité dans la paroi artérielle.	80

FIG. 6.3	Conditions frontières.	82
FIG. 6.4	Géométrie et distribution de la rigidité dans la paroi artérielle.	86
FIG. 6.5	Conditions frontières.	87
FIG. 6.6	Maillage et géométrie de l'artère isolée.	89
FIG. 6.7	Maillage et géométrie de l'artère avec tissus musculaires. . .	90
FIG. 6.8	Comparaison des déplacements : artère isolée vs avec tissus musculaires	91
FIG. 6.9	Comparaison des épaisseurs : artère isolée vs avec tissus musculaires	92
FIG. 6.10	Vecteurs vitesse et ligne de courant.	94
FIG. 6.11	Iso-valeurs des contraintes principales pour les deux cas d'artères.	95
FIG. 6.12	Iso-valeurs des déformations principales pour les deux cas d'artères.	97
FIG. 6.13	Géométrie de l'oeil.	101
FIG. 6.14	Conditions frontières.	104
FIG. 6.15	Maillages de l'oeil pour une pression interne de 15 mmHg. .	106
FIG. 6.16	Maillages de l'oeil pour une pression interne de 50 mmHg. .	107
FIG. 6.17	Déformations vraies et amplifiées.	108
FIG. 6.18	Croquis de la position du point de référence pour la mise à zéro.	109
FIG. 6.19	Déplacements relatifs de la papille pour une pression interne qui passe de 15 mmHg à 50 mmHg.	110
FIG. 6.20	Déplacements relatifs de la lamina cribrosa pour une pression interne qui passe de 15 mmHg à 50 mmHg.	111
FIG. 6.21	Première déformations principales.	113

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

Caractères usuels

d	petite perturbation
dA	élément de surface
e	erreur
\mathbf{e}_r	vecteur unitaire dans la direction r
\mathbf{e}_x	vecteur unitaire dans la direction x
E	module de Young
$\overline{\overline{\mathbf{E}}}$	tenseur de déformation non linéaire de Green-Lagrange
$\mathbf{f} = (f_x, f_r)$	vecteur des forces volumiques
\mathbf{f}_r	force résiduelle
$f(x)$	équation quelconque de l'interface
$\overline{\overline{\mathbf{F}}}$	tenseur de passage de la configuration non déformée à la configuration déformée
h	hauteur de la fonction sinusoïdale
h_e	taille d'un élément
$\overline{\overline{\mathbf{h}}}$	tenseur gradient des déformations
$\overline{\overline{\mathbf{I}}}$	tenseur de la matrice identité
J	jacobien du tenseur de passage $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$
\mathbf{J}	matrice jacobienne
k	paramètre qui détermine la valeur de la condition de dirichlet sur l'axe de symétrie
$\mathbf{n} = (n_x, n_r)$	vecteur normal à la surface
$\mathbf{r} = (r_x, r_r)$	forces appliquées sur l'interface
r_I	équation de l'interface
\mathbf{R}	vecteur résidu

\mathbf{R}_{NS}	vecteur résidu de la forme faible des équations de Navier-Stokes
S_x	contraintes de cauchy dans la direction x
S_r	contraintes de cauchy dans la direction r
$\bar{\mathbf{t}}$	traction sur les frontières
$\mathbf{u} = (u, v, w)$	vecteur vitesse
\mathbf{U}	vecteur des inconnues
$\bar{\mathbf{u}}$	condition de Dirichlet imposée sur \mathbf{u}
$\mathbf{x} = (x, r, \theta)$	coordonnées cylindriques

Lettres grecques

$\dot{\gamma}$	tenseur du taux de déformation
Γ_D	frontière associée au domaine de calcul Ω où on impose des conditions de Dirichlet
Γ_I	frontière associée à l'interface fluide-solide des conditions de Dirichlet
Γ_N	frontière associée au domaine de calcul Ω où on impose des conditions de Neumann
δ	correction
δp	fonction test
$\delta \mathbf{r} = (\delta r, \delta s)$	fonction test
$\delta \mathbf{u} = (\delta u, \delta v)$	fonction test
δw	travail virtuel
λ_{ps}	coefficient de Lamé du solide
λ_s	coefficient de Lamé du solide
μ_f	viscosité du fluide

μ_{ps}	coefficient de Lamé du solide
μ_s	coefficient de Lamé du solide
ν	coefficient de Poisson
ρ	masse volumique
$\overline{\overline{\sigma}}_c$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\overline{\overline{\sigma}}_f$	tenseur des contraintes fluides
$\overline{\overline{\sigma}}_k$	tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff
$\overline{\overline{\sigma}}_l$	tenseur des contraintes de Piola-Lagrange
ϕ	fonction d'interpolation
$\chi = (\xi, \eta)$	vecteur des déplacements
$\overline{\chi}$	condition de Dirichlet imposée sur χ
Ω	domaine de calcul

Indices et exposants

0	associé à la configuration non déformée
1	associé à la configuration déformée
-1	inverse
<i>est</i>	solution estimée
<i>exa</i>	solution exacte
<i>f</i>	associé au fluide
<i>h</i>	solution éléments finis
<i>int</i>	associé à l'interface
<i>j</i>	valeur nodale
<i>n</i>	itération n
$n+1$	itération $n + 1$

s	associé au solide
ps	associé au pseudo-solide
T	transposée
Ω	associé au domaine de calcul
Γ	associé à une frontière
\sim	polynôme de projection locale
$'$	dérivée

Symboles

∇	opérateur gradient
$\nabla \cdot$	opérateur divergence
$\frac{\partial \cdot}{\partial \cdot}$	dérivée partielle
$\ \cdot \ $	norme

LISTE DES TABLEAUX

TAB. 5.1	Tableau de l'évolution de l'erreur estimée et de l'erreur exacte avec le maillage.	75
TAB. 6.1	Propriétés géométriques et mécaniques de l'artère.	78
TAB. 6.2	Caractéristiques de l'écoulement du sang.	81
TAB. 6.3	Propriétés des tissus avoisinants de l'artère.	85
TAB. 6.4	Propriétés géométriques et mécaniques de l'oeil.	100
TAB. 6.5	Valeur des paramètres de l'humeur aqueuse.	103

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS EN COORDONNÉES CY- LINDRIQUES	121
ANNEXE II	DÉTAILS DES TERMES SOURCES UTILISÉS POUR SA- TISFAIRE LES ÉQUATIONS POUR LE FLUIDE ET LE SOLIDE	124

INTRODUCTION

Depuis des années, les problèmes d'interactions fluide-structure ont suscité et suscitent, encore aujourd'hui, un grand intérêt en ingénierie. Ce volet particulier de la mécanique se retrouve dans plusieurs applications. On pense à l'aéroélasticité qui trouve son intérêt en aéronautique, mais que l'on peut également appliquer aux éoliennes, aux câbles de réseaux de distribution d'électricité, à la construction de grands ponts comme celui de Millau en France, etc. On pense aussi à l'hydroélasticité qui trouve son intérêt pour la construction de plate-formes pétrolières au large des côtes (offshore plat-forms). On peut également mentionner les écoulements autour des sous-marins ou des coques de bateaux, l'étude des profils immergés, etc. Plus près de nous, la mécanique des interactions fluide-structure peut s'appliquer aux écoulements internes comme ceux des échangeurs de chaleur, des pompes, des systèmes hydrauliques, des systèmes de tuyauterie résidentiels ou commerciaux, etc. Et encore plus près de nous, on a les écoulements internes au corps humain tels que le système pulmonaire, urinaire et sanguin. L'intérêt, de plus en plus marqué, porté à l'étude du système sanguin provient entre autres de la constante augmentation des maladies cardiovasculaires dans les pays industrialisés comme le Canada. Selon Santé Canada, les maladies cardiovasculaires sont responsables de trois décès sur huit et coûtent environ 20 milliards de dollars chaque année aux canadiens et canadiennes.

Au Canada, les impacts sociaux et économiques sont majeurs. La recherche pour les maladies cardiovasculaires prend de plus en plus d'ampleur en prévision du vieillissement de la population dans les années qui viennent. Le besoin de développer de nouveaux outils d'analyse devient nécessaire. C'est ici qu'intervient l'ingénierie. Celle-ci apporte à la médecine un support technologique qui accélère le développement de ces nouveaux outils. Elle offre également la possibilité d'étudier de façon

plus quantitative les mécanismes physiques impliqués dans le développement de pathologies.

Dans le cas des maladies cardiovasculaires, la morphologie de l'artère et le comportement de l'écoulement sanguin sont intimement liés. Un changement, aussi petit qu'il soit, dans le comportement de l'écoulement provoque une modification dans la géométrie de l'artère et vice versa. À titre d'exemple, on pense à l'épaississement des artères causé par la présence de contraintes anormales dans l'écoulement. Il y a également l'athérosclérose qui est causée par l'accumulation de plaques sur les parois artérielles. Cette accumulation obstrue de façon significative une partie de l'artère et perturbe l'écoulement sanguin. Il ne faut surtout pas oublier les maladies qui provoquent le gonflement de l'aorte ascendante causée par un changement de la structure de l'artère et qui ont impact considérable sur la dynamique de l'écoulement sanguin. Tous ces changements ont un impact important sur le système cardiovasculaire et jouent un rôle significatif dans le développement de ce type de maladies. La morphologie de l'artère et le comportement du sang ne peuvent être dissociés de la cause des maladies cardiovasculaires. Une compréhension détaillée de l'influence de la modification de l'artère sur l'écoulement du sang et de celui-ci sur la géométrie de l'artère peut avoir des impacts importants sur les procédures d'interventions. En effet, les conséquences à long terme des changements géométriques apportés lors d'interventions chirurgicales sont encore mal connues. Le développement d'outils d'analyse pourra aider à quantifier les conséquences de telles interventions de façon plus précise et ainsi optimiser les procédures d'interventions.

L'outil d'analyse pour lequel la communauté scientifique montre un intérêt particulier est la simulation par ordinateur par le biais des méthodes numériques. Avec les outils informatiques qui ne cessent de gagner en puissance, on opte de plus en plus pour la simulation numérique en interactions fluide-structure. De plus, l'utilisation des méthodes numériques est indispensable face à la complexité du problème

d'interactions fluide-structure dans le cas d'un écoulement sanguin dans une artère flexible.

Suite à l'importance du problème, il a été jugé pertinent d'y porter notre attention et d'en faire l'objet du présent mémoire. Ce mémoire se propose donc d'étendre au cas axisymétrique la formulation monolithique d'interactions fluide-structure stationnaire et adaptative pour des écoulements incompressibles développée en cartésien par Étienne^[14].

Ce mémoire comporte cinq chapitres. Au chapitre 1, on donne quelques explications d'ordre général du problème posé telles que la modélisation, la résolution et l'adaptativité. Pour chacun des thèmes abordés au cours de ce chapitre, on fait une courte revue bibliographique. Pour terminer ce chapitre, on positionne la contribution du présent travail dans le domaine des interactions fluide-structure. Au chapitre 2, on s'attaque aux équations utilisées pour modéliser le problème fluide-structure. Le chapitre 3 est réservé à la résolution du problème. On fait la description de la méthode des éléments finis et on développe la formulation variationnelle des équations. Quelques détails concernant les éléments utilisés y sont précisés. Également dans ce chapitre, une section assez importante concerne la stratégie de résolution pour coupler le fluide et la structure. Pour terminer ce chapitre, on discute des normes utilisées pour l'adaptation du maillage. Au chapitre 4, on présente le cas test utilisant la méthode des solutions manufacturées permettant de vérifier le bon fonctionnement du résolveur et de l'estimateur d'erreur. Au chapitre 5, on présente quelques cas d'application. On compare le cas d'un écoulement dans une artère ayant une faiblesse dans la paroi avec celui d'une artère juxtaposée de tissus avoisinants. On y fait l'analyse de l'influence de ces tissus avoisinants sur le comportement de la paroi artérielle et de l'écoulement. On termine avec la description d'un glaucome sur lequel on fait une analyse des déplacements et déformations. Ce mémoire se termine par une conclusion.

CHAPITRE 1

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Dans ce chapitre, on aborde tout d’abord les éléments clés de la modélisation et de la résolution d’écoulements dans les tubes flexibles, une analogie aux écoulements sanguins dans les artères. Une section est réservée à l’adaptation de maillage, un outil puissant en terme d’économie d’éléments et d’optimisation de maillage. Pour terminer, on positionne le présent travail par rapport à sa contribution scientifique. Une revue bibliographique accompagne chacun des thèmes abordés tout au long de ce chapitre.

1.1 Modélisation et résolution

La modélisation d’écoulements sanguins dans les artères suscite un grand intérêt en ingénierie. Les premiers travaux qui s’apparentent à ce type d’écoulements sont ceux de Womersley ^[46] ^[47]. Il y décrit un modèle analytique complet d’un écoulement pulsé dans un tube élastique droit. On retrouve également les détails du développement de ce modèle dans un ouvrage écrit par McDonald ^[26]. Il est bien connu que la géométrie réelle est beaucoup plus complexe qu’un simple tube droit. On pense seulement aux bifurcations ou à la crosse aortique où la modélisation analytique est beaucoup trop complexe, voire impossible. De ce fait, une approche beaucoup plus macroscopique a été apportée pour s’affranchir des limitations géométriques présentées par les modèles analytiques. Cette approche, décrite initialement par Snyder et al. ^[37] et par Westerhof et al. ^[45], est basée sur l’analogie d’un système

électrique. Elle permet de connaître le débit et la pression à différents endroits dans le système artériel modélisé avec des tubes rigides droits. C'est un outil simple mais très efficace que Sud et al. ^[39] ont utilisé pour comprendre l'influence de la présence d'une sténose sur la distribution du débit et de la pression dans le système artériel. Bien que l'approche analytique et macroscopique soit utile pour certaines analyses, il demeure pertinent de poursuivre l'étude de ce type d'écoulements à l'aide des méthodes numériques.

Les méthodes numériques sont un outil qui nous permet de décrire à la fois le comportement du sang et de la paroi artérielle de façon locale et globale. Beaucoup de travaux ont utilisés les méthodes numériques pour modéliser ce type de problèmes d'interactions fluide-structure. Pour en citer quelques uns, on souligne les travaux de Peskin et al. ^[29]. L'approche proposée est connue sous le nom de la méthode des frontières immergées. Cette approche a été appliquée aux écoulements sanguins dans le coeur. Il y a également les travaux de Quarteroni et al. ^[30] qui utilise une formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) dans le fluide ; la structure est couplée de manière explicite. Il faut souligner les travaux de Fernandez et al. ^[16] qui utilise la même formulation mais cette fois le fluide et la structure sont couplés de façon semi-implicite. Ils ont appliqué leur approche aux écoulements sanguins dans des artères élastiques. Pour le lecteur curieux, on peut mentionner les travaux de Taylor et al. ^[40], De Hart et al. ^[10], Steinman et al. ^[38], Van De Vosse et al. ^[43], Heil ^[20] et Chen et al. ^[5].

La résolution de problèmes d'interactions fluide-structure nécessite d'utiliser deux formulations qui sont, du point de vue de leur définition, bien différentes : la formulation eulérienne pour le fluide et lagrangienne pour la structure. La formulation eulérienne se résume à fixer un volume de contrôle dans le temps et dans l'espace et d'observer le mouvement d'une particule matérielle qui passe à travers ce volume. Tandis que la formulation lagrangienne se résume à suivre une masse de contrôle

de manière qu'elle se compose toujours des mêmes particules matérielles et ce dans le temps. Puisque le domaine d'observation est représenté par le maillage, celui qui est associé à la formulation lagrangienne varie dans le temps tandis que celui qui est associé à la formulation eulérienne ne varie pas dans le temps. Dans la plupart des cas, il est préférable que le fluide soit décrit par une formulation eulérienne et que la structure soit décrite par une formulation lagrangienne ^[10]. Dans notre cas, nous sommes en présence d'un problème d'interactions fluide-structure. La formulation associée au fluide ne peut pas être simplement eulérienne puisqu'elle est incompatible avec la formulation lagrangienne qui décrit le domaine structure. En effet, le maillage du fluide et de la structure sont liés à l'interface fluide-structure. Lorsqu'il y a un déplacement de la structure, il faut également que le maillage fluide se déplace, ce qui est interdit si on utilise une formulation strictement eulérienne. Par contre, ce déplacement du maillage fluide se fait indépendamment du mouvement des particules fluides. Nous avons donc une description presque eulérienne du fluide avec un mouvement du maillage fluide dépendant des déplacements de la structure. La formulation qui décrit ce comportement du domaine fluide est la formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Cette formulation particulière a été présentée pour la première fois par Hirt et al. ^[22]. On peut citer en plus les travaux de Donea et al. ^[12], Hughes et al. ^[23], Teixeira et al. ^[42], qui ont utilisé cette formulation pour résoudre des problèmes d'interactions fluide-structure. Dans ce mémoire, on considère seulement le cas stationnaire du problème fluide-structure. Le maillage fluide reste donc fixe dans le temps. Ainsi, la formulation ALE devient inutile. Par contre, au cours des itérations, lors de la résolution du problème, il faut déplacer le maillage au fur et à mesure que la structure se déforme. Plusieurs techniques de remaillage sont décrites plus loin dans ce chapitre. Pour l'instant, on conclue qu'on utilisera une formulation eulérienne pour le fluide et une formulation lagrangienne pour la structure.

Les équations qui décrivent le comportement du fluide sont celles de Navier-Stokes. On retrouve leur forme générale dans plusieurs ouvrages dont celui de Currie [8]. En ce qui nous concerne, nous nous limiterons à la forme stationnaire des équations. De plus, comme nous sommes en présence d'un écoulement sanguin dans une artère, on considère le fluide comme incompressible et on utilise un repère axisymétrique. Du côté de la structure, les équations utilisées sont issues de la théorie de l'élasticité telle que présentée par Atanackovic et al. [1], Bonet et al. [4] et Dubigeon [13]. On se place encore une fois dans un repère axisymétrique pour écrire les équations d'équilibre. On utilise un solide isotropique, c'est à dire que le matériau a les mêmes propriétés dans toutes les directions. Ajoutons que l'on considère le cas où la structure subit de grands déplacements. Ceci sera exprimé par la non linéarité géométrique de la relation contrainte-déformation.

Nous avons parlé précédemment de la formulation qui est associée au fluide. Pour la rendre compatible avec la formulation lagrangienne de la structure, il est nécessaire de déplacer le maillage. Il existe plusieurs techniques pour y arriver. On les classe en trois catégories différentes. La première consiste à remailler complètement le domaine fluide après que les frontières aient été déplacées. Cette méthode a été utilisée entre autres par Heil [20]. Il mentionne que les équations fluides sont basées sur une description eulérienne, alors que le maillage est ajusté de façon automatique à chaque fois que la structure se déforme. La deuxième catégorie fait référence à une approche pseudo-solide discrète. Cette approche utilise un schéma dans lequel les arêtes du maillage ont un comportement analogue à celui de ressorts. De cette façon on peut contrôler le mouvement des noeuds du maillage. On peut citer les travaux de Farhat et al. [15] et Degand et al. [9]. Ils ont utilisé des ressorts linéaires et des ressorts de torsion qui permettent au maillage de se déformer et d'éviter que certains éléments se replient sur eux-même. La dernière catégorie utilise une approche pseudo-solide continue qui simule le comportement d'un solide pour décrire le mou-

vement du maillage fluide de façon continue ^[34]. Plusieurs matériaux pseudo-solides ont été développés dont ceux qui utilisent l'équation de Laplace pour déterminer le déplacement du maillage fluide tel que décrit par Voorde et al. ^[44] et Frey et al. ^[17]. Il y a également les matériaux pseudo-solides qui utilisent une loi de comportement élastique pour déterminer le déplacement des noeuds du maillage. À ce sujet, on peut citer les travaux de Lohner et al. ^[24] et Lund et al. ^[25]. Ils ont également amélioré leur modèle pseudo-solide en ajoutant une rigidité variable qui augmente en s'approchant des frontières mobiles pour éviter la génération d'éléments trop écrasés. Chiandussi et al. ^[6] ont également considéré un pseudo-solide élastique. Ils ont utilisé le module de Young du matériau comme variable de lissage pour finalement obtenir un maillage presque uniforme. Nielsen et al. ^[27] ont pour leur part utilisé le coefficient de poisson comme variable de lissage en rendant incompressible les éléments trop écrasés. En ce qui nous concerne, nous avons choisi la 3^e catégorie comme support du maillage et en particulier l'approche de Sackinger et al. ^[34]. Ce choix nous offre beaucoup de liberté sur la structure interne du maillage déformé. De plus, cette catégorie de pseudo-solide permet une résolution couplée de la structure, du fluide et du pseudo-solide par une méthode de Newton-Raphson.

Le couplage entre le fluide et la structure peut être fait de deux manières : faiblement ou fortement couplée. De manière faible, les algorithmes de résolution pour le fluide et la structure sont complètement séparés. On peut citer les travaux de Quarteroni et al. ^[30]. On rencontre très fréquemment ce type de couplage en interactions fluide-structure, que ce soit en industrie ou en recherche. La principale motivation de ce choix provient du fait que les ingénieurs ont accès à des solveurs pour le fluide et pour la structure séparément. De plus cette approche minimise les ressources informatiques nécessaires et/ou évite la complexité additionnelle rencontrée lors du couplage fort des équations fluides et structures. La force de l'approche couplée provient du fait qu'elle garantit l'équilibre à l'interface fluide-structure. De plus,

elle est beaucoup plus stable que la version découplée lorsqu'elle est bien implantée. À ce sujet, on peut citer les travaux de Ghattas et al. ^[19] et Lund et al. ^[25]. En ce qui nous concerne, nous avons choisi d'opter pour l'approche fortement couplée par souci de précision et de stabilité. Le couplage fort utilisé dans ce mémoire est inspiré de la méthode développée par Sackinger et al. ^[34]. Une approche pseudo-solide telle que décrite précédemment est utilisée dans le domaine fluide. On résout de façon simultanée et implicite les équations fluides, structures et pseudo-solides.

Pour résoudre les équations du fluide, de la structure et du pseudo-solide, on utilise la méthode des éléments finis. Cette méthode permet la résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles que l'on retrouve en interactions fluide-structure. Mentionnons l'ouvrage de Reddy ^[31] comme livre de référence à propos de cette méthode. Il faut mentionner qu'on utilise des maillages non-structurés qui sont indispensables aux méthodes adaptatives et qui sont très bien supportés par la méthode des éléments finis.

1.2 Adaptation de maillage

La maillage joue un rôle important lors de la résolution numérique d'un problème. En effet, la précision et la qualité de la solution dépendent fortement du maillage utilisé. En fait, plus le maillage est fin, meilleurs devraient être les résultats. Par contre, comme la disponibilité de mémoire est limitée, il faut absolument discrétiser de façon judicieuse le domaine de calcul. C'est-à-dire de raffiner le maillage là où la solution varie beaucoup et générer des éléments plus gros aux endroits où la solution varie peu. En d'autres mots, la discrétisation doit être adaptée à la solution à résoudre.

Le processus existant de remaillage adaptatif permet d'obtenir automatiquement

des maillages adaptés à la solution. Il suffit de résoudre le problème et par la suite on procède à une estimation de l'erreur. À partir de l'estimation, un opérateur de transition génère un nouveau maillage. Hétu ^[21] présente deux opérateurs de transition en détails, dont l'objectif est de remailler le domaine de calcul de façon à ce que l'estimer de l'erreur soit uniforme et plus petite. L'utilisateur a seulement à spécifier le facteur de réduction de l'erreur d'un maillage à l'autre. De cette façon, on arrive à générer un maillage optimum avec un minimum de ressources.

L'estimation d'erreur peut être calculée de plusieurs façons. Dans ce mémoire, on utilise une méthode appartenant à la famille des projections, soit celle de projection locales proposée par Zienkiewicz et al. ^[48]. Elle se résume à construire à partir de la solution numérique, généralement linéaire et discontinue, une distribution enrichie qui sera plus près de la solution exacte. Par distribution enrichie, on entend d'un ordre supérieur à celui de la solution numérique. Par exemple, dans le cas d'une solution numérique linéaire et discontinue, on construit une nouvelle distribution quadratique et discontinue. La projection utilisée procède à des projections au sens des moindres carrés d'une forme intégrale définie sur de petits groupes d'éléments.

1.3 Contribution scientifique

La contribution du présent mémoire ne se situe pas au niveau du développement de nouvelles méthodes, mais plutôt en une extension au cas axisymétrique de la formulation monolithique pour les problèmes d'interactions fluide-structure cartésien en régime stationnaire pour des écoulements incompressibles développée par Étienne ^[14]. La deuxième contribution consiste à mettre en lumière l'influence des tissus avoisinants dans le cas d'un écoulement dans une artère. Peu d'études ont été faites à ce sujet, voire aucune. Cet aspect permettra d'ajouter du réalisme à la simulation.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DU PROBLÈME FLUIDE-SOLIDE

Dans ce chapitre, on examine en détail les équations utilisées pour la modélisation mathématique du problème fluide-solide. Cette modélisation comporte trois groupes d'équations bien distincts. Le premier groupe est celui du fluide décrit par les équations de Navier-Stokes. Le second et le troisième groupes sont ceux du solide et du pseudo-solide qui sont décrits par les équations de la théorie de l'élasticité. On termine ce chapitre avec une description des conditions qui s'appliquent à l'interface fluide-solide.

2.1 Équations pour le fluide

Les équations qui modélisent le comportement du fluide sont celles de Navier-Stokes ^[8]. Dans le cas qui nous intéresse, nous allons considérer seulement la forme stationnaire et incompressible de ces équations. De ce fait, on considère que ρ demeure constant et que toutes les dérivées par rapport au temps sont nulles. Ainsi, les équations pour le fluide s'écrivent sous la forme suivante :

– Équation de continuité :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_f \quad (2.1)$$

– Équation du mouvement :

$$\rho_f \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{u}_f = \nabla \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f + \rho_f \mathbf{f}_f \quad \text{dans} \quad \Omega_f \quad (2.2)$$

où \mathbf{u}_f est le vecteur vitesse dans le fluide, ρ_f est la masse volumique dans le fluide, \mathbf{f}_f est le champ des forces volumiques dans le fluide et $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f$ est le tenseur des contraintes visqueuses et de pression dans le fluide qui s'écrit :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f = \mu_f \left[\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T \right] - p_f \bar{\bar{\mathbf{I}}} \quad (2.3)$$

où μ_f est la viscosité dynamique et p_f est la pression dans le fluide.

Ce système d'équations doit être fermé mathématiquement en spécifiant les conditions frontières. On verra au chapitre suivant que ces conditions apparaissent naturellement dans la formulation variationnelle des équations. On écrit ses conditions de la façon suivante :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{t}}_f \quad \text{sur } \Gamma_N^f \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u}_f = \bar{\mathbf{u}}_f \quad \text{sur } \Gamma_D^f \quad (2.5)$$

où Γ_N^f correspond à la portion de la frontière fluide où une condition de Neumann est appliquée en imposant une force $\bar{\mathbf{t}}_f$ et Γ_D^f correspond à celle où une condition de Dirichlet est appliquée en imposant une vitesse $\bar{\mathbf{u}}_f$.

Dans le cas axisymétrique, on utilise le système de coordonnées (x, r, θ) où x est la direction axiale, r est la direction radiale et θ est la direction tangentielle. Les composantes du vecteur vitesse associées à ces directions sont respectivement u , v et w . Dans le cas présent, on considère uniquement le cas sans tourbillon, c'est-à-dire qu'on suppose que $w = 0$ et que $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$. Les équations pour le fluide s'écrivent donc sous la forme suivante :

– Équation de continuité :

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{v_f}{r} + \frac{\partial v_f}{\partial r} = 0 \quad (2.6)$$

– Équation du mouvement dans la direction axiale :

$$\rho_f \left(u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu_f \frac{\partial u_f}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \right] + \rho_f f_x^f \quad (2.7)$$

– Équation du mouvement dans la direction radiale :

$$\rho_f \left(u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p_f}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[2r\mu_f \frac{\partial v_f}{\partial r} \right] - 2\mu_f \frac{v_f}{r^2} + \rho_f f_r^f \quad (2.8)$$

On retrouve à l'annexe I plus de détails sur les opérateurs différentiels dans un repère cylindrique.

Maintenant que le problème est bien posé, on peut donc résoudre les équations fluide dans Ω_f avec ses conditions frontières telles qu'illustrées à la figure 2.1.

2.2 Équations pour le solide

La formulation lagrangienne s'impose naturellement pour la résolution des équations pour le solide. Il est bien entendu que le choix de cette formulation demeure un choix et qu'il aurait tout aussi bien été possible de résoudre les équations du solide en utilisant une autre formulation.

Dans le cas qui nous intéresse, le solide subit de grands déplacements. Bien que la formulation la plus appropriée pour ce type de problème soit la formulation lagrangienne mise à jour ^[2] puisqu'elle permet de résoudre facilement les problèmes fluide-solide ayant subi de grands déplacements ^[14], nous avons préféré une

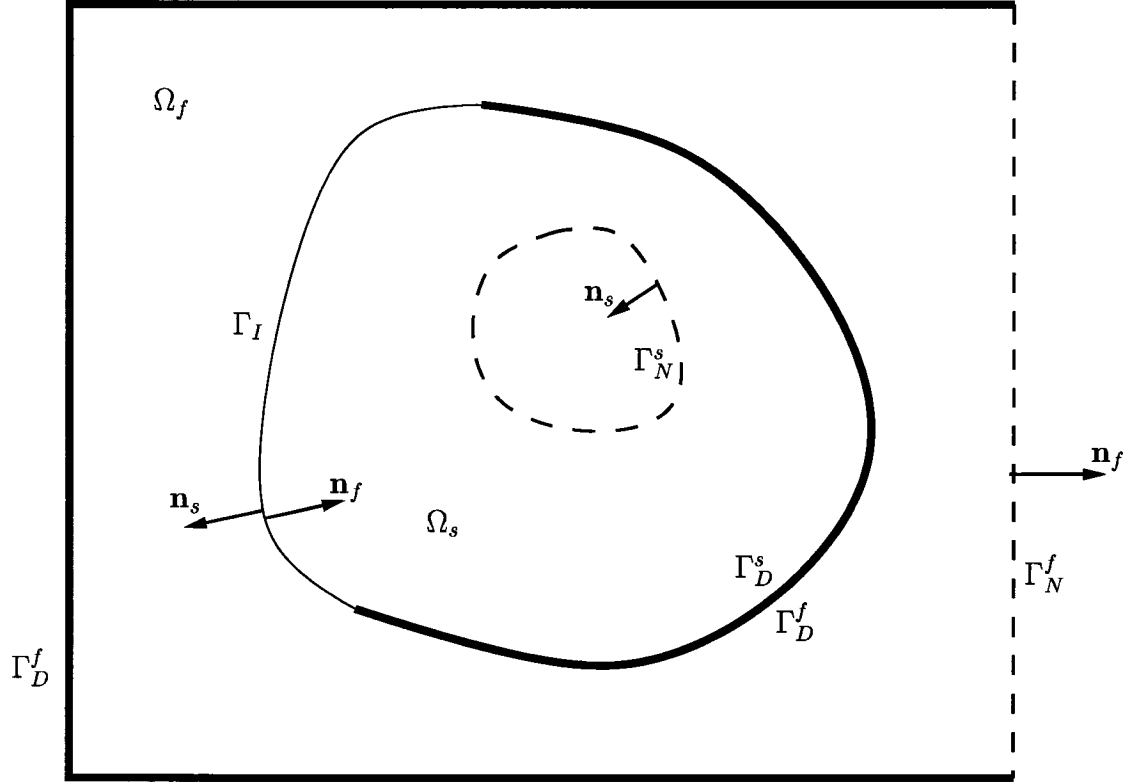


FIG. 2.1 Notation du problème fluide-solide

formulation lagrangienne totale car elle est plus simple. Cependant, elle est moins robuste que celle du lagrangien mis à jour. Cette formulation est équivalente à celle mise à jour excepté que la solution de départ est la solution dans la configuration initiale, soit non déformée.

Pour décrire la formulation lagrangienne totale, nous avons besoin d'introduire trois tenseurs de contraintes. Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff (ou le 2^e Piola-Kirchoff), $\bar{\bar{\sigma}}_k$, qui correspond aux contraintes sur la configuration non déformée en fonction de la surface non déformée. Le tenseur des contraintes de Piola-Lagrange (ou le 1^e Piola-Kirchoff), $\bar{\bar{\sigma}}_l$, qui correspond aux contraintes sur la configuration déformée en fonction de la surface non déformée. Finalement, le ten-

seur des contraintes de Cauchy, $\overline{\overline{\sigma}}_c$, correspond aux contraintes sur la configuration déformée en fonction de la surface déformée. Nous avons également besoin d'introduire le tenseur $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ qui correspond à la transformation géométrique qui permet de passer de la configuration initiale à la configuration déformée. On écrit ce tenseur comme suit :

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{\mathbf{I}}} + \overline{\overline{\mathbf{h}}} \quad (2.9)$$

Le tenseur $\overline{\overline{\mathbf{I}}}$ correspond à la position initiale et le tenseur $\overline{\overline{\mathbf{h}}} = \nabla \chi$ correspond au tenseur gradient des déformations exprimé dans la configuration initiale. Le vecteur des déplacements, χ , s'écrit comme suit :

$$\chi = \xi \mathbf{e}_x + \eta \mathbf{e}_r \quad (2.10)$$

Grâce au tenseur $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$, on peut établir les relations entre les différents tenseurs des contraintes. La première est la relation entre le tenseur de Piola-lagrange et le tenseur Piola-Kirchoff qui s'écrit :

$$\overline{\overline{\sigma}}_l = \overline{\overline{\mathbf{F}}} \overline{\overline{\sigma}}_k \quad (2.11)$$

La seconde relation est celle entre le tenseur de Cauchy et celui de Piola-Kirchoff et qui s'écrit :

$$\overline{\overline{\sigma}}_c = \frac{\overline{\overline{\mathbf{F}}} \overline{\overline{\sigma}}_k \overline{\overline{\mathbf{F}}}^T}{J} \quad (2.12)$$

où $J = \det(\overline{\overline{\mathbf{F}}})$ est le jacobien de la transformation de passage de la configuration non déformée à la configuration déformée.

En ce qui concerne la loi de comportement du solide, on le considère comme étant hyperélastique et isotropique (matériau St.Venant-Kirchoff). Pour ce cas spécial,

la loi de Hooke généralisée se réduit à :

$$\bar{\bar{\sigma}}_k = \lambda_s \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}}) \bar{\bar{\mathbf{I}}} + 2\mu_s \bar{\bar{\mathbf{E}}} \quad (2.13)$$

où λ_s et μ_s sont les constantes de Lamé du solide et $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$ est le tenseur de déformation non linéaire de Green-Lagrange défini comme :

$$\bar{\bar{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} [\bar{\bar{\mathbf{h}}}^T + \bar{\bar{\mathbf{h}}}] + \frac{1}{2} [\bar{\bar{\mathbf{h}}}^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{h}}}] \quad (2.14)$$

Maintenant que les différents tenseurs sont bien définis, nous pouvons passer à l'énoncé de la formulation lagrangienne totale qui exprime l'équilibre du solide de la façon suivante :

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}}_l + \mathbf{f}_s = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega_s \quad (2.15)$$

À cette équation, s'ajoute des conditions frontières telles que :

$$\bar{\bar{\sigma}}_l \cdot \mathbf{n}_s = \bar{\mathbf{t}}_s \quad \text{sur} \quad \Gamma_N^s \quad (2.16)$$

$$\chi_s = \bar{\chi}_s \quad \text{sur} \quad \Gamma_D^s \quad (2.17)$$

où Γ_N^s correspond à la portion de la frontière solide où une condition de Neumann est appliquée en imposant une force $\bar{\mathbf{t}}_s$ et Γ_D^s correspond celle où une condition de Dirichlet est appliquée en imposant un déplacement $\bar{\chi}_s$.

Dans un repère axisymétrique, on peut écrire les équations pour le solide sous la forme suivante :

– Dans la direction axiale :

$$\frac{\partial \sigma_{l_{xx}}}{\partial x} + \frac{1}{r} \sigma_{l_{xr}} + \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{l_{xr}}) + f_x^s = 0 \quad (2.18)$$

– Dans la direction radiale :

$$\frac{\partial \sigma_{l_{rx}}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{l_{rr}}}{\partial r} + \frac{\sigma_{l_{rr}} - \sigma_{l_{\theta\theta}}}{r} + f_r^s = 0 \quad (2.19)$$

Maintenant que le problème est bien posé, on peut donc résoudre les équations pour le solide dans Ω_s avec ses conditions frontières telles qu'illustrées dans la figure 2.1.

2.3 Équations pour le pseudo-solide

Le choix de la loi de comportement concernant le pseudo-solide s'est arrêté sur un matériau élastique isotropique. Pour le modéliser, on utilise la forme linéaire du tenseur Green-Lagrange pour obtenir un champ de déplacements qu'on applique au maillage. On appelle pseudo-solide, le solide sur lequel repose le maillage. En utilisant la forme linéaire du tenseur Green-Lagrange, on obtient les équations d'élasticité linéaire suivante :

$$\bar{\bar{\mathbf{E}}}^{ps} = \frac{1}{2} \left[\bar{\bar{\mathbf{h}}}^{ps} + (\bar{\bar{\mathbf{h}}}^{ps})^T \right] \quad (2.20)$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_k^{ps} = \lambda_{ps} \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}}^{ps}) \bar{\bar{\mathbf{I}}} + 2\mu_{ps} \bar{\bar{\mathbf{E}}}^{ps} \quad (2.21)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}}^{ps} = \bar{\bar{\mathbf{I}}} + \bar{\bar{\mathbf{h}}}^{ps} \quad (2.22)$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l^{ps} = \bar{\bar{\mathbf{F}}}^{ps} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_k^{ps} \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l^{ps} = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega_f \quad (2.24)$$

où λ_{ps} et μ_{ps} sont les constantes de Lamé pour le pseudo-solide.

On complète l'énoncé par les conditions frontières suivantes :

$$\chi_{ps} = 0 \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_I \quad (2.25)$$

$$\chi_{ps} = \overline{\chi}_s \quad \text{sur } \Gamma_I \quad (2.26)$$

où $\Gamma = \Gamma_D^f \cup \Gamma_N^f \cup \Gamma_I$, Γ_I représente l'interface fluide-solide et $\overline{\chi}_s$ les déplacements du pseudo-solide.

Dans le repère axisymétrique, les équations pour le pseudo-solide s'écrivent finalement sous la forme suivante :

– Dans la direction axiale :

$$\frac{\partial \sigma_{l_{xx}}^{ps}}{\partial x} + \frac{1}{r} \sigma_{l_{xr}}^{ps} + \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{l_{xr}}^{ps}) = 0 \quad (2.27)$$

– Dans la direction radiale :

$$\frac{\partial \sigma_{l_{rx}}^{ps}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{l_{rr}}^{ps}}{\partial r} + \frac{\sigma_{l_{rr}}^{ps} - \sigma_{l_{\theta\theta}}^{ps}}{r} = 0 \quad (2.28)$$

Les conditions frontières sont quelque peu différentes de celles spécifiées pour le solide. Il faut noter que le pseudo-solide n'a pas d'influence sur le champ de déplacements du solide et qu'il s'agit seulement d'un artifice de calcul pour générer un champ de déplacements pour le maillage. Il faut donc que le pseudo-solide puisse se déformer librement et qu'il n'offre aucune résistance au déplacement du solide et éviter de contribuer aux forces ressenties par le solide à l'interface. Ainsi, à l'interface, on impose les déplacements du solide comme condition frontière et ailleurs sur la frontière fluide on impose un déplacement nul. Nous avons un libre choix des lois de comportement du pseudo-solide pour décrire le champ de déplacements. Le

pseudo-solide est complètement dépendant du champ de déplacements du solide.

Alors le pseudo-solide est résolu dans Ω_f ayant pour conditions frontières celles décrites ci-haut et telles qu'illustrées à la figure 2.1.

2.4 Conditions d'équilibre à l'interface fluide-solide

Le couplage du fluide et du solide se fait par l'intermédiaire de l'interface entre les deux milieux. Deux conditions doivent y être satisfaites : une condition cinématique et une condition d'équilibre. La première impose l'égalité des vitesses du fluide et du solide à l'interface. Dans notre cas, puisqu'on considère le problème stationnaire, cette condition s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_s = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_I \quad (2.29)$$

En ce qui concerne la deuxième condition, elle fait intervenir les tenseurs des contraintes des deux domaines exprimés à l'interface dans la configuration déformée. Il faut que les contraintes à l'interface fluide-solide soient égales pour qu'il y ait équilibre de l'interface. On peut donc écrire :

$$\bar{\bar{\sigma}}_c \cdot \mathbf{n}_s + \bar{\bar{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}_f = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_I \quad (2.30)$$

où \mathbf{n}_s est la normale unitaire sortante pour le domaine solide à l'interface fluide-solide dans la configuration déformée, et par construction, $\mathbf{n}_f = -\mathbf{n}_s$.

Les tenseurs des contraintes, $\bar{\bar{\sigma}}_c$ et $\bar{\bar{\sigma}}_f$, qui se retrouvent dans la deuxième condition sont des tenseurs de Cauchy dans le fluide et dans le solide respectivement. Ces tenseurs expriment les contraintes sur la configuration déformée en fonction de la

surface déformée. Ainsi, ils reflètent le fait que la solution fluide est obtenue avec une formulation Eulérienne tandis que les déplacements solides sont exprimés dans une formulation Lagrangienne.

CHAPITRE 3

MÉTHODE DE RÉOLUTION

Ce chapitre porte sur la méthode des éléments finis pour résoudre les équations présentées au chapitre précédent. Pour utiliser cette méthode, on doit tout d'abord écrire les équations sous leur forme faible. On décrit ensuite les éléments qui ont été choisis pour discrétiser le domaine de calcul fluide et solide. On poursuit avec une description détaillée de la stratégie de résolution du problème fluide-structure fortement couplé. On termine ce chapitre avec la description des normes d'erreur utilisées pour l'adaptation du maillage dans les domaines fluide et solide.

3.1 Notation

D'entrée de jeu, il est important de mettre au clair la notation utilisée tout au long de ce chapitre. Comme précisé précédemment, les équations fluide-solide mettent en évidence deux types de formulations : eulérienne et lagrangienne. De par sa nature, la formulation eulérienne s'exprime dans un repère déformé puisque le volume de contrôle associé représente le domaine fluide réel, c'est-à-dire une fois déformé. Par contre, la formulation lagrangienne s'exprime dans un repère non déformé puisqu'elle fait référence à la masse de contrôle d'origine. Dorénavant, lorsque que nous ferons référence à la formulation lagrangienne, nous parlerons de configuration non déformée et les variables associées porteront l'indice 0. Lorsque que nous ferons référence à la formulation eulérienne, nous parlerons de configuration déformée et les variables associées porteront l'indice 1. Les deux configurations et la notation sont illustrées à la figure 3.1.

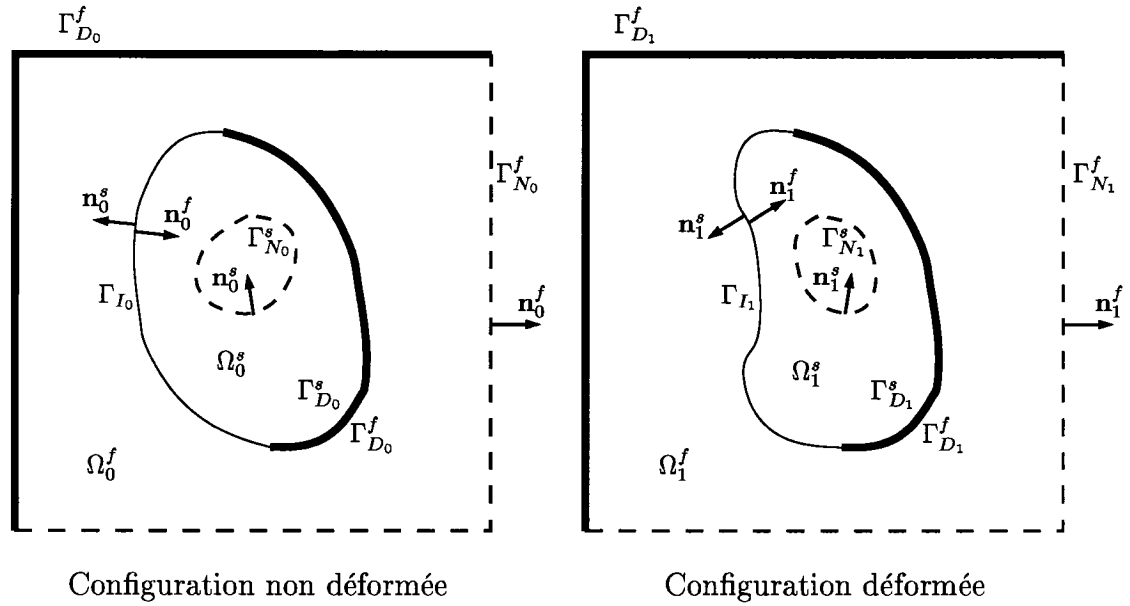


FIG. 3.1 Notation du problème fluide-solide selon la configuration.

3.2 Méthode des éléments finis

Les équations énoncées au chapitre précédent ne possèdent pas de solution exacte dans le cas d'un domaine de calcul de forme quelconque. Il devient donc nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour résoudre ces équations. Nous avons choisi la méthode des éléments finis car elle permet de résoudre facilement des équations aux dérivées partielles. Elle se décompose en plusieurs étapes. On doit tout d'abord écrire les équations à résoudre sous leur forme faible. Puis, on discrétise ces équations et on les assemble pour obtenir un système non linéaire d'équations que l'on résout par la méthode de Newton-Raphson.

3.3 Formulation faible des équations

Pour définir la forme faible des équations aux dérivées partielles, on multiplie ces équations par une fonction test et on intègre par parties (théorème de Gauss) les termes du second ordre sur le domaine de calcul correspondant pour faire apparaître naturellement les termes de bords qui correspondent aux conditions frontières de Neumann.

3.3.1 Formulation faible des équations pour le fluide

Appliquons la procédure décrite précédemment aux équations de Navier-Stokes (2.1) et (2.2). On commence par multiplier l'équation de continuité par une fonction test scalaire δp . La forme faible de l'équation de continuité s'écrit alors de la manière suivante :

$$\int_{\Omega_1^f} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u}_f \, d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

On remarque que nous avons intégré l'équation de continuité sur le domaine fluide dans sa configuration déformée. Ce choix provient du fait que les équations régissant le fluide sont exprimées dans un repère eulérien donc dans la configuration déformée.

En ce qui concerne l'équation du mouvement, on la multiplie par une fonction test $\delta \mathbf{u}$, on intègre par partie (théorème de Gauss) les termes de diffusion et de pression contenus dans $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f$. La forme faible de l'équation du mouvement s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1^f} (\delta \mathbf{u} \cdot \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{u}_f + \nabla \delta \mathbf{u} : \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f) \, d\Omega = \\ \int_{\Gamma_{N_1}^f \cup \Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) \, d\Gamma + \int_{\Omega_1^f} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_f \mathbf{f}_f \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

où Ω_1^f est le domaine fluide dans la configuration déformée, $\Gamma_{N_1}^f$ est la frontière fluide sur laquelle on applique une condition de Neumann dans la configuration déformée et Γ_{I_1} est la frontière qui correspond à l'interface fluide-solide dans la configuration déformée où on applique une condition de non glissement.

L'application du théorème de Gauss apporte un terme de bord qui est aussi appelé condition naturelle. Il est important de noter que cette condition fait intervenir les contraintes fluides, $\bar{\sigma}_f$, appliquées sur les frontières $\Gamma_{N_1}^f \cup \Gamma_{I_1}$ exprimées dans la configuration déformée. Le tenseur des contraintes fluides, $\bar{\sigma}_f$, s'exprime dans la même configuration que le tenseur de Cauchy $\bar{\sigma}_c$ dans le solide.

Dans notre cas, on utilise un repère axisymétrique ; on peut écrire les équations de continuité et de mouvement sous leur forme faible de la manière suivante :

– Équation de continuité :

$$\int_{\Omega_1^f} \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{v_f}{r} + \frac{\partial v_f}{\partial r} \right) \delta p \, d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

– Équation du mouvement dans la direction axiale :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1^f} \rho_f \left(u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial r} \right) \delta u \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega_1^f} \mu_f \left[2 \frac{\partial u_f}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial r} \right] - \int_{\Omega_1^f} p_f \frac{\partial \delta u}{\partial x} \, d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_{N_1}^f \cup \Gamma_{I_1}} \left[2\mu_f \frac{\partial u_f}{\partial x} n_{x_1}^f + \mu_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) n_{r_1}^f \right] \delta u \, d\Gamma + \int_{\Omega_1^f} \rho_f f_x^f \delta u \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

– Équation du mouvement dans la direction radiale :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1^f} \rho_f \left(u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial r} \right) \delta v \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega_1^f} \mu_f \left[\left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial x} + 2 \frac{\partial v_f}{\partial r} \frac{\partial \delta v}{\partial r} + 2 \frac{v_f^2}{r} \delta v \right] - \int_{\Omega_1^f} p_f \left(\frac{\partial \delta v}{\partial r} + \frac{\delta v}{r} \right) \, d\Omega \\ & = \int_{\Gamma_{N_1}^f \cup \Gamma_{I_1}} \left[\mu_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) n_{x_1}^f + 2\mu_f \frac{\partial v_f}{\partial r} n_{r_1}^f \right] \delta v \, d\Gamma + \int_{\Omega_1^f} \rho_f f_r^f \delta v \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.3.2 Formulation faible des équations pour le solide

On obtient la forme faible des équations d'équilibre de la théorie l'élasticité (2.15), en appliquant le principe du travail virtuel [4]. Considérons une fonction test $\delta \mathbf{r}$ qui représente une vitesse virtuelle arbitraire relative par rapport à la configuration non déformée. Le travail virtuel δw , par unité de volume et de temps, fait par une force résiduelle \mathbf{f}_r lors d'un déplacement virtuel est donnée par $\mathbf{f}_r \cdot \delta \mathbf{r}$. À l'équilibre, on peut alors écrire que :

$$\delta w = \mathbf{f}_r \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (3.6)$$

Puisque que $\delta \mathbf{r}$ est arbitraire, la seule solution possible à l'équation (3.6) est l'équation vectorielle $\mathbf{f}_r = \mathbf{0}$. Ainsi, nous pouvons utiliser l'équation (2.15) comme équation résiduelle, la multiplier par la fonction test $\delta \mathbf{r}$ et l'intégrer sur Ω_0^s pour obtenir l'expression :

$$\int_{\Omega_0^s} \delta \mathbf{r} \cdot (\nabla \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l + \mathbf{f}_s) \, d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

Dans ce cas-ci, on intègre les équations d'équilibre du solide dans la configuration non déformée puisque celles-ci s'expriment dans un repère lagrangien.

L'intégration par partie de l'équation (3.7) nous mène à la forme faible suivante :

$$\int_{\Omega_0^s} (\nabla \delta \mathbf{r} : \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l + \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_s) \, d\Omega = \int_{\Gamma_{N_0}^s \cup \Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{r} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s) \, d\Gamma \quad (3.8)$$

Un commentaire s'impose sur l'expression de la condition naturelle issue de l'intégration par parties du membre de droite de l'équation (3.8). On remarque que cette condition est exprimée en fonction du tenseur de Piola-Lagrange, $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l$. Dans le cas de la forme faible pour le fluide (3.2), cette même condition est exprimée en fonction du tenseur des contraintes fluides, qui n'est autre que le tenseur de Cauchy. De

plus, Ω_0^s et Γ_{I_0} correspondent au domaine solide et à l'interface fluide-solide dans la configuration non déformée. Tandis que, Ω_1^f et Γ_{I_1} correspondent au domaine fluide et à l'interface fluide-solide dans la configuration déformée. Cette comparaison reflète bien le fait que les référentiels naturels pour le fluide et le solide sont bien différents. On parle d'une formulation eulérienne pour le fluide et d'une formulation lagrangienne pour le solide. Cette différence doit être prise en considération lors du traitement de l'interface qui fait intervenir à la fois les contraintes fluides et solides.

Dans le repère axisymétrique, on peut écrire les équations sous la forme suivante :

– Dans la direction axiale :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^s} \sigma_{l_{xx}} \frac{\partial \delta r}{\partial x} + \sigma_{l_{xr}} \frac{\partial \delta r}{\partial r} + f_x^s \delta r d\Omega \\ = \int_{\Gamma_{N_0}^s \cup \Gamma_{I_0}} (\sigma_{l_{xx}} n_{x_0}^s + \sigma_{l_{xr}} n_{r_0}^s) \delta r d\Gamma \end{aligned} \quad (3.9)$$

– Dans la direction radiale :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^s} \sigma_{l_{rx}} \frac{\partial \delta s}{\partial x} + \sigma_{l_{rr}} \frac{\partial \delta s}{\partial r} + \sigma_{l_{\theta\theta}} \frac{\delta s}{r} + f_r^s \delta s d\Omega \\ = \int_{\Gamma_{N_0}^s \cup \Gamma_{I_0}} (\sigma_{l_{rx}} n_{x_0}^s + \sigma_{l_{rr}} n_{r_0}^s) \delta s d\Gamma \end{aligned} \quad (3.10)$$

où δr et δs sont respectivement les fonctions tests pour le solide dans la direction x et r .

3.3.3 Formulation faible des équations pour le pseudo-solide

La formulation faible pour les équations du pseudo-solide s'obtient de la même manière que celle du solide. Nous avons donc :

$$\int_{\Omega_0^{ps}} \delta \mathbf{r} \cdot (\nabla \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l^{ps} + \mathbf{f}_{ps}) \, d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

L'intégration par parties de l'équation (3.11) nous mène au résultat suivant :

$$\int_{\Omega_0^{ps}} (\nabla \delta \mathbf{r} : \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l^{ps} + \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_{ps}) \, d\Omega = \int_{\Gamma_{N_0}^{ps} \cup \Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{r} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l^{ps} \cdot \mathbf{n}_0^{ps}) \, d\Gamma \quad (3.12)$$

Les fonctions tests utilisées pour le pseudo-solide sont les mêmes que celles utilisées pour le solide.

Il faut noter que la normale à l'interface du pseudo-solide, \mathbf{n}_0^{ps} , est identique à celle du fluide, \mathbf{n}_0^f , et ce dans les deux configurations. Nous avons également une condition naturelle qui s'exprime en fonction du tenseur de Piola-Lagrange, $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l^{ps}$, tel que nous l'avons vu dans l'équation (3.8). Finalement, on traite le pseudo-solide dans un repère lagrangien tout comme le solide.

Dans le repère axisymétrique, on écrit les équations de la manière suivante :

– Dans la direction axiale :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^{ps}} \sigma_{l_{xx}}^{ps} \frac{\partial \delta r}{\partial x} + \sigma_{l_{xr}}^{ps} \frac{\partial \delta r}{\partial r} + f_x^{ps} \delta r \, d\Omega \\ = \int_{\Gamma_{N_0}^{ps} \cup \Gamma_{I_0}} \left(\sigma_{l_{xx}}^{ps} n_{x_0}^{ps} + \sigma_{l_{xr}}^{ps} n_{r_0}^{ps} \right) \delta r \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.13)$$

– Dans la direction radiale :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_0^{ps}} \sigma_{l_{rx}}^{ps} \frac{\partial \delta s}{\partial x} + \sigma_{l_{rr}}^{ps} \frac{\partial \delta s}{\partial r} + \sigma_{l_{\theta\theta}}^{ps} \frac{\delta s}{r} + f_r^{ps} \delta s d\Omega \\
= \int_{\Gamma_{N_0}^{ps} \cup \Gamma_{I_0}} \left(\sigma_{l_{rx}}^{ps} n_{x_0}^{ps} + \sigma_{l_{rr}}^{ps} n_{r_0}^{ps} \right) \delta s d\Gamma
\end{aligned} \quad (3.14)$$

3.3.4 Couplage entre le fluide, le solide et le pseudo-solide

Le couplage monolithique entre le fluide, le solide et le pseudo-solide s'obtient grâce à un traitement implicite de la forme faible des équations d'équilibre de l'interface. Pour les unir, il a fallu introduire un nouveau type d'éléments d'épaisseur nulle pour discrétiser l'interface fluide-solide. Voir section 3.4.

3.3.4.1 Continuité des forces

Pour obtenir la forme faible de l'équilibre des forces à l'interface, on multiplie l'équation 2.30 par une fonction test $\delta \mathbf{u}$ et on intègre, dans ce cas, sur la frontière qui représente l'interface fluide-solide. La forme faible s'écrit alors :

$$\int_{\Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{u} \cdot \left(\overline{\boldsymbol{\sigma}}_c \cdot \mathbf{n}_1^s + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f \right) d\Gamma = 0 \quad (3.15)$$

que l'on peut scinder en deux termes :

$$\int_{\Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{r} \cdot (\overline{\boldsymbol{\sigma}}_c \cdot \mathbf{n}_1^s) d\Gamma + \int_{\Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{u} \cdot (\overline{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) d\Gamma = 0 \quad (3.16)$$

Ces termes correspondent à ceux qui apparaissent naturellement dans formulation faible pour le fluide (3.2) et le solide (3.8). Par contre, on remarque que le premier terme de l'équation (3.16) n'est pas exprimé dans la même configuration que celui dans l'équation (3.8) et que les tenseurs de contraintes ne correspondent pas. En

effet, dans la forme faible des équations d'équilibre du solide, la condition naturelle est exprimée dans la configuration non déformée tandis que ici, elle est exprimée dans la configuration déformée.

On effectue un changement de variable approprié pour passer de la configuration déformée à la configuration non déformée. Pour ce faire, on utilise la formule de Nanson ^[13] qui permet de transformer une surface exprimée dans la configuration déformée à une surface exprimée dans la configuration non déformée :

$$\mathbf{n}_1 dA_1 = J \left(\bar{\mathbf{F}}^{-1} \right)^T \cdot \mathbf{n}_0 dA_0 \quad (3.17)$$

où dA_1 et dA_0 correspondent respectivement à la surface dans la configuration déformée et non déformée, $J = \det(\bar{\mathbf{F}})$ est le jacobien de la transformation géométrique $\bar{\mathbf{F}}$ permettant le passage de la configuration non déformée à la configuration déformée.

Grâce à cette formule, on peut réécrire le premier terme de l'équation (3.16) de la manière suivante :

$$\int_{\Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{u} \cdot \left(J \bar{\boldsymbol{\sigma}}_c \cdot \left(\bar{\mathbf{F}}^{-1} \right)^T \cdot \mathbf{n}_0^s \right) d\Gamma \quad (3.18)$$

De plus, on déduit, des équations (2.11) et (2.12), que $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l = J \bar{\boldsymbol{\sigma}}_c \cdot \left(\bar{\mathbf{F}}^{-1} \right)^T$. On peut maintenant réécrire la forme faible de l'équilibre des forces (3.16) sous sa nouvelle forme :

$$\int_{\Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s) d\Gamma + \int_{\Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) d\Gamma = 0 \quad (3.19)$$

Le terme de gauche représente la contribution des forces solides à l'interface dans la configuration non déformée. Tandis que celui de droite correspond à la contribution des forces fluides à l'interface dans la configuration déformée. Sous cette forme, on peut immédiatement faire la correspondance des termes contenus dans

l'équation (3.19) avec ceux qui apparaissent de façon naturelle dans la forme faible des équations (3.2) et (3.8). On verra l'impact de cette correspondance à la section 3.5.

3.3.4.2 Continuité des déplacements solides et pseudo-solides

En ce qui concerne le pseudo-solide, celui-ci est couplé avec le solide. En fait, il est totalement dépendant des déplacements du solide à l'interface. On impose la continuité des déplacements à l'interface que l'on écrit :

$$\chi_{ps} = \chi_s \quad \text{sur} \quad \Gamma_{I_1} \quad (3.20)$$

3.4 Discrétisation

On obtient les équations éléments finis en discrétisant la forme variationnelle des équations obtenue précédemment. On découpe en sous-domaines simples, appelés éléments, le domaine de calcul réel. Par la suite, on assemble les équations discrétisées et on résout le système non linéaire par la méthode de Newton-Raphson.

La discrétisation du domaine de calcul est de type non structurée. C'est-à-dire de maillage obtenu par triangulation du domaine. Bien que plusieurs types d'éléments soient disponibles, nous avons choisi l'élément Taylor-Hood (P2-P1) pour le cas de vérification et les cas d'application présentés au chapitre 6. Cet élément est illustré à la figure 3.2. Il s'agit d'un élément qui utilise des interpolants linéaires en pression et quadratiques en vitesse et déplacements. Il faut noter que la pression est continue. Il y a donc 12 degrés de liberté en vitesse et en déplacement et 3 en pression sur cet élément. L'ordre de convergence de cet éléments est $O(h^2)$ en utilisant les normes d'erreur appropriées, voir section 5.1.2.

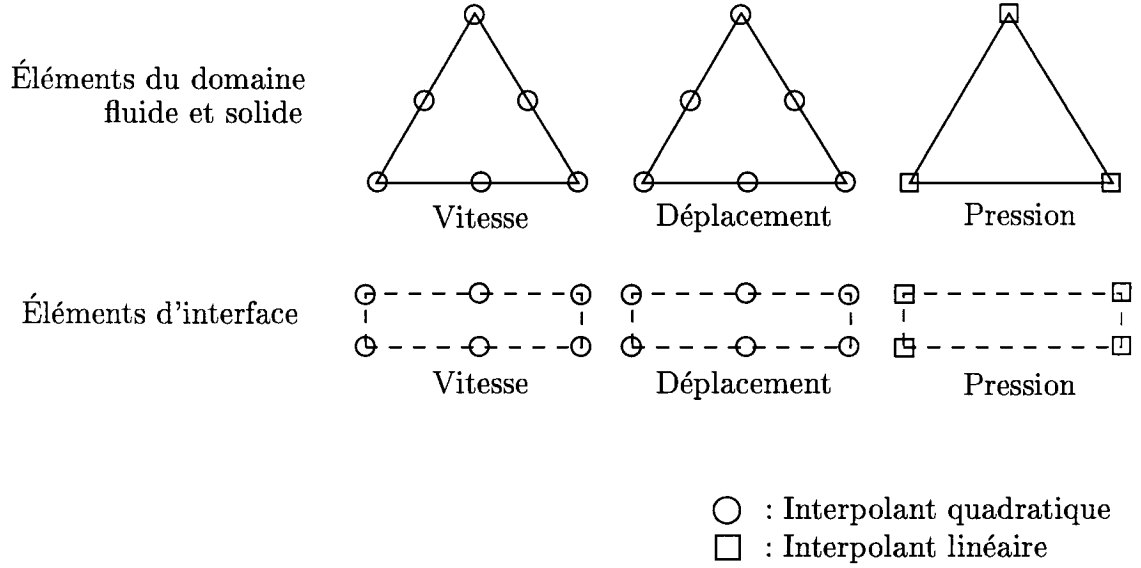


FIG. 3.2 Élément de Taylor-Hood et d'interface.

La discrétisation de l'interface nécessite un traitement spécial. On discrétise l'interface avec des éléments unidimensionnels appelés éléments d'interface tels qu'illustrés à la figure 3.2. Ils ont pour fonction de communiquer les forces fluides au solide et d'imposer les déplacements du solide au pseudo-solide. On verra en détail, dans la section qui suit, le rôle précis que jouent ces éléments d'interface lors du couplage fluide-solide. Il s'agit d'un élément qui utilise des interpolants linéaires en pression et quadratiques en vitesse et en déplacement. Cet élément possède 12 degrés de liberté en vitesse et en déplacement et 4 en pression.

Maintenant que le domaine est discrétisé, il suffit d'interpoler la solution. On remplace les différentes variables présentes dans les formulations faibles par des approximations polynomiales de fonctions d'interpolation :

$$u_h = \sum_{j=1}^{n_{\phi_u}} u_j \phi_j^u \quad (3.21)$$

$$v_h = \sum_{j=1}^{n_{\phi_v}} v_j \phi_j^v \quad (3.22)$$

$$p_h = \sum_{j=1}^{n_{\phi_p}} p_j \phi_j^p \quad (3.23)$$

$$\xi_h = \sum_{j=1}^{n_{\phi_\xi}} \xi_j \phi_j^\xi \quad (3.24)$$

$$\eta_h = \sum_{j=1}^{n_{\phi_\eta}} \eta_j \phi_j^\eta \quad (3.25)$$

où, par exemple, u_h est la solution éléments finis de la composante horizontale de la vitesse, n_{ϕ_u} est le nombre d'interpolants associés à u sur l'élément, u_j sont les valeurs nodales et ϕ_j^u sont les fonctions d'interpolations de u associées au noeud j .

3.5 Stratégie de résolution

Nous avons choisi une stratégie de résolution monolithique (fortement couplée) pour coupler de façon implicite tous les degrés de liberté associés à la vitesse, à la pression et aux déplacements pseudo-solides et solides. Cette approche nécessite un traitement implicite de toutes les conditions frontières du fluide et du solide, y compris celle de l'interface. Cette dernière nous assure que le fluide et le solide sont couplés de façon la plus intime possible.

Le couplage est illustré par la figure 3.3 et la figure 3.4.

La figure 3.3 illustre très bien, sous la forme d'une matrice, la relation entre toutes les inconnues du système d'équations qui résulte du couplage fluide-solide. Dans cette figure, \mathbf{u}_f , p_f et χ_{ps} sont la vitesse, la pression et les déplacements du pseudo-solide dans le domaine fluide, \mathbf{u}_f^{int} et \mathbf{r}_f^{int} sont la vitesse et les réactions du fluide à l'interface, χ_{ps}^{int} et χ_s^{int} sont les déplacements du pseudo-solide et du solide à

l'interface, \mathbf{u}_s^{int} et \mathbf{r}_s^{int} sont la vitesse et les réactions du solide à l'interface, et χ_s et \mathbf{u}_s sont les déplacements et la vitesse dans le solide. Le symbole \mathbf{I} correspond à la matrice identité. Elle a pour rôle d'imposer la continuité des inconnues à l'interface. De plus, les zones ombragées indiquent la contribution de la forme faible correspondante. Par exemple, la ligne 1 correspond à l'équation du mouvement qui dépend de \mathbf{u}_f , p_f , \mathbf{u}_f^{int} , χ_{ps} , χ_{ps}^{int} .

En ce qui concerne la figure 3.4, elle résume bien le caractère implicite du couplage. Les éléments de gauche indiquent que le mouvement du fluide dépend de la déformation du pseudo-solide induite par celle du solide. Ceux de droite illustrent que la déformation du solide qui dépend des forces induites par l'écoulement du fluide. Cette boucle illustre très bien le couplage implicite de tous les degrés de liberté.

No. de ligne

1											
2											
3			\mathbf{I}						$-\mathbf{I}$		
4				$-\mathbf{I}$							
5											
6						\mathbf{I}	$-\mathbf{I}$				
7								$-\mathbf{I}$			
8				$-\mathbf{I}$				\mathbf{I}			
9											
10											
11											

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_f \\ p_f \\ \mathbf{u}_f^{int} \\ \mathbf{r}_f^{int} \\ \chi_{ps} \\ \chi_{ps}^{int} \\ \chi_s^{int} \\ \mathbf{r}_s^{int} \\ \mathbf{u}_s^{int} \\ \chi_s \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

FIG. 3.3 Matrice globale du problème fluide-solide

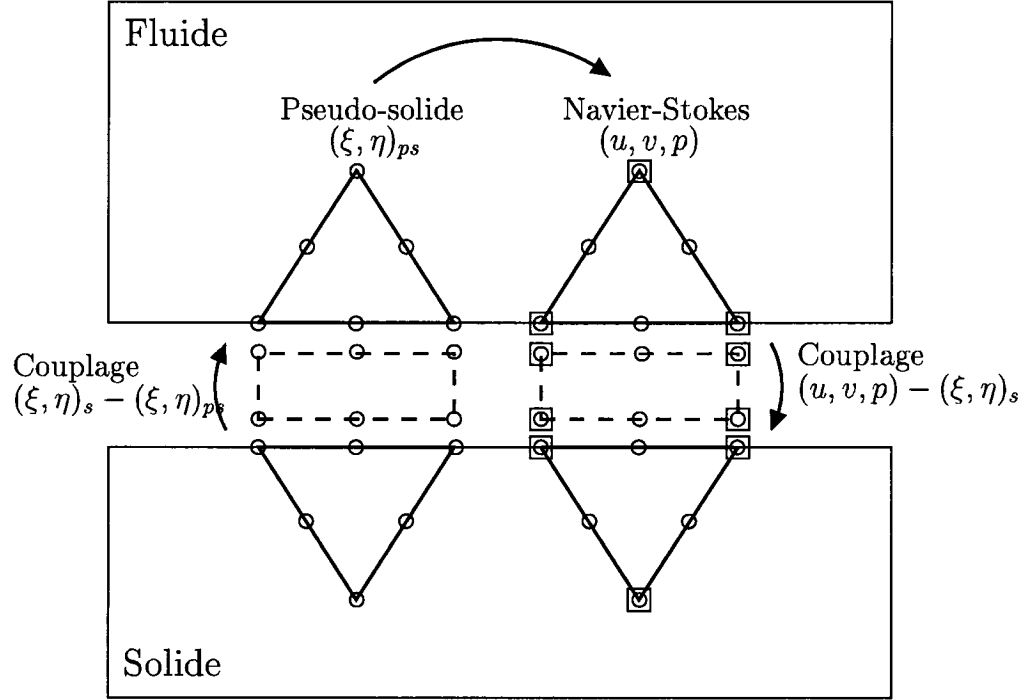


FIG. 3.4 Illustration du couplage implicite entre les éléments frontières à l'interface fluide-solide par l'entremise des éléments d'interface.

À partir des relations entre le fluide et le solide illustrées à la figure 3.4, on en déduit trois étapes clés pour le couplage fort du fluide et du solide : la continuité des déplacements entre le pseudo-solide et le solide à l'interface, la continuité des forces à l'interface fluide-solide et finalement le traitement spécial de la dépendance du fluide par rapport au pseudo-solide tel que décrit par Sackinger et al. ^[34].

La continuité des déplacements solides et pseudo-solides qui s'exprime numériquement par la ligne 6 de la matrice à la figure 3.3.

Les forces fluides sont appliquées sur le solide par l'intermédiaire d'inconnues implicites qui correspondent aux réactions obtenues par une variante implicite de la méthode des réactions ^[11]. Cette méthode utilise la vitesse à l'interface pour écrire les équations des réactions sur l'interface pour ensuite les inclure dans le système

global. Ceci conduit à la ligne 4 de la figure 3.3 qui illustre bien la relation implicite entre le fluide et les autres inconnues \mathbf{u}_f , p_f , χ_{ps} , \mathbf{u}_f^{int} et χ_{ps}^{int} . L'équation des réactions pour le solide est écrite à la ligne 7 et est exprimée de façon similaires. Dans notre cas, les vitesses à l'interface pour le fluide et le solide sont égales et nulles puisque le problème est stationnaire (voir ligne 3). Maintenant, il suffit d'imposer la continuité des réactions telle qu'illustrée à la ligne 8 de la figure 3.3. Pour calculer ces réactions, on utilise la forme faible des équations présentées précédemment :

$$\int_{\Omega_1^f} (\delta \mathbf{u} \cdot \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{u}_f + \nabla \delta \mathbf{u} : \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f) d\Omega - \underbrace{\int_{\Gamma_{I_1}} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) d\Gamma}_{\mathbf{r}_f^{int}} = \underbrace{\int_{\Gamma_{N_1}^f} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_1^f) d\Gamma}_{\text{condition de Neumann}} \quad (3.26)$$

$$\int_{\Omega_0^s} (\nabla \delta \mathbf{r} : \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l) d\Omega - \underbrace{\int_{\Gamma_{I_0}} \delta \mathbf{r} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s) d\Gamma}_{\mathbf{r}_s^{int}} = \underbrace{\int_{\Gamma_{N_0}^s} \delta \mathbf{r} \cdot (\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_l \cdot \mathbf{n}_0^s) d\Gamma}_{\text{condition de Neumann}} \quad (3.27)$$

Les inconnues \mathbf{r}_f^{int} et \mathbf{r}_s^{int} sont respectivement les réactions du fluide et du solide.

Ces réactions proviennent de la séparation des termes de bord qui apparaissent naturellement dans la forme faible des équations fluides et solide, équation (3.2) et (3.8). L'avantage de la méthode des réactions provient du fait qu'elle ne dépend pas du type d'éléments. Comme les réactions fluides sont transférées au solide de manière implicite, elles sont ajoutées aux inconnues du système global sans alourdir ni ralentir la phase de résolution.

La troisième étape concerne la dépendance de l'écoulement fluide par rapport aux déplacements du pseudo-solide sur lequel il repose. Nous avons adopté l'approche de type ALE proposée par Sackinger et al. [34]. Ils ont présenté une approche éléments finis pour des problèmes à frontières libres qui s'appuie sur la méthode de Newton-

Raphson. Dans leur cas comme le nôtre, il faut porter une attention toute particulière à la linéarisation du système d'équations fluides et pseudo-solides. Dans ce système d'équations, nous avons un groupe d'équations différentielles qui décrit le comportement du fluide et un autre groupe qui décrit celui du pseudo-solide sur lequel repose l'écoulement fluide. On peut représenter dans un vecteur les inconnues associées aux deux groupes :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Omega}^f \\ \mathbf{u}_{\Gamma}^f \\ \boldsymbol{\chi}_{\Omega}^{ps} \\ \boldsymbol{\chi}_{\Gamma}^{ps} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

où les indices supérieurs f et ps correspondent respectivement à des quantités associées au fluide et au pseudo-solide. Les indices inférieurs Ω et Γ représentent respectivement le domaine et ses frontières.

La discrétisation du système d'équations différentielles partielles fluides - pseudo-solides conduit au système d'équations résiduelles suivant :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{u}_{\Omega}^f) \\ \mathbf{R}(\mathbf{u}_{\Gamma}^f) \\ \mathbf{R}(\boldsymbol{\chi}_{\Omega}^{ps}) \\ \mathbf{R}(\boldsymbol{\chi}_{\Gamma}^{ps}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

Les résidus fluides, $\mathbf{R}(\mathbf{u}_{\Omega}^f)$, et pseudo-solides, $\mathbf{R}(\boldsymbol{\chi}_{\Omega}^{ps})$, sont issus des équations de Navier-Stokes et de celles du pseudo-solide. Les résidus pour les conditions frontières du fluide, $\mathbf{R}(\mathbf{u}_{\Gamma}^f)$, proviennent de l'application de conditions de Dirichlet ou Neumann sur les frontières fluides. Finalement, le groupe $\mathbf{R}(\mathbf{u}_{\Gamma}^{ps})$ reflète les conditions frontières appliquées au pseudo-solide. La condition que l'on applique à la frontière du pseudo-solide qui correspond à l'interface fluide-solide dépend de

la physique du problème. Dans notre cas, on impose que les déplacements à la frontière pseudo-solide qui correspond à l'interface soient égaux aux déplacements du solide. Ici, la physique du problème à l'interface se résume à un solide qui se déforme sous l'action des forces fluides. La position finale de l'interface dépend donc des forces fluides et de la loi de comportement du solide. On impose donc de façon implicite une condition de Dirichlet sur la frontière du pseudo-solide correspondant à l'interface fluide-solide. Sur les autres frontières, on peut appliquer soit une condition de Dirichlet ou de Neumann.

L'utilisation de la méthode de Newton-Raphson pour la résolution du système d'équations des résidus (3.29) nécessite l'évaluation de la matrice jacobienne qui décrit la sensibilité des équations par rapport à chacune des inconnues. En partant d'une solution initiale, on trouve un vecteur de corrections qui permet d'obtenir la solution recherchée en résolvant un système linéaire :

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}^n)\delta\mathbf{U}^n = -\mathbf{R}(\mathbf{U}^n) \quad (3.30)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \delta\mathbf{U}^n \quad (3.31)$$

où la matrice jacobienne, \mathbf{J} , s'écrit :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_\Omega^f)}{\partial \mathbf{u}_\Omega^f} & \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_\Gamma^f)}{\partial \mathbf{u}_\Gamma^f} & \boxed{\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_\Omega^f)}{\partial \chi_\Omega^{ps}} & \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_\Omega^f)}{\partial \chi_\Gamma^{ps}}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_\Gamma^f)}{\partial \mathbf{u}_\Omega^f} & \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_\Gamma^f)}{\partial \mathbf{u}_\Gamma^f} & \boxed{\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_\Gamma^f)}{\partial \chi_\Omega^{ps}} & \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_\Gamma^f)}{\partial \chi_\Gamma^{ps}}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}(\chi_\Omega^{ps})}{\partial \mathbf{u}_\Omega^f} & \frac{\partial \mathbf{R}(\chi_\Omega^{ps})}{\partial \mathbf{u}_\Gamma^f} & \frac{\partial \mathbf{R}(\chi_\Omega^{ps})}{\partial \chi_\Omega^{ps}} & \frac{\partial \mathbf{R}(\chi_\Omega^{ps})}{\partial \chi_\Gamma^{ps}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}(\chi_\Gamma^{ps})}{\partial \mathbf{u}_\Omega^f} & \frac{\partial \mathbf{R}(\chi_\Gamma^{ps})}{\partial \mathbf{u}_\Gamma^f} & \frac{\partial \mathbf{R}(\chi_\Gamma^{ps})}{\partial \chi_\Omega^{ps}} & \frac{\partial \mathbf{R}(\chi_\Gamma^{ps})}{\partial \chi_\Gamma^{ps}} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

La sous matrice 2 par 2 en haut à gauche de (3.32) représente la sensibilité des équations de Navier-Stokes par rapport à la vitesse et la pression. La sous-matrice 2 par 2 en bas à droite représente la sensibilité des équations du pseudo-solide par rapport à ses propres déplacements. En ce qui concerne la sous-matrice de l'encadré du haut, elle représente la sensibilité des équations de Navier-Stokes par rapport aux déplacements du pseudo-solide. On verra en détail le traitement de cette sensibilité. La dernière sous matrice au bas à gauche, représente la sensibilité des équations du pseudo-solide par rapport à la vitesse et la pression. Cette sensibilité est implicite au problème. Le fluide applique des forces sur le solide qui se déforme, ce qui induit des déformations dans le pseudo-solide. Donc une perturbation dans le champ de vitesse et de pression provoque un déplacement du pseudo-solide par l'intermédiaire de l'interface. On approxime les coefficients de la matrice jacobienne par une différence finie. Par exemple, la composante $\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_\Omega^f)}{\partial \mathbf{u}_\Omega^f}$ se calcul à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}_\Omega^f)}{\partial \mathbf{u}_\Omega^f} = \frac{\mathbf{R}(\mathbf{u}_f + d\mathbf{u}_f) - \mathbf{R}(\mathbf{u}_f)}{d\mathbf{u}_f} \quad (3.33)$$

où $d\mathbf{u}_f$ est la valeur de la perturbation appliquée sur les variables.

Voyons maintenant comment la forme faible des équations de Navier-Stokes est dépendante des déplacements du pseudo-solide. C'est-à-dire la signification de la sous-matrice de l'encadré du système (3.32). Cette dépendance provient du fait que les interpolants de la vitesse et de la pression dépendent des coordonnées des noeuds qui sont elles-mêmes dépendantes des déplacements du pseudo-solide. Formellement, $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_f(\mathbf{x}(\chi_{ps}))$ et $p_f = p_f(\mathbf{x}(\chi_{ps}))$. Pour obtenir les coefficients de la matrice jacobienne de l'encadré, on doit tenir compte de cette dépendance implicite des interpolants et des fonctions tests en termes des déplacements du pseudo-solide induit par la déformation du solide à l'interface. Comme on utilise un jacobien numérique pour linéariser implicitement les équations, il suffit

d'évaluer l'équation (3.33) pour des perturbation de coordonnées nodales. On note $\mathbf{R}_{NS}(\boldsymbol{\chi}_{ps})$ les résidus de la forme faible des équations de Navier-Stokes dans lesquels on exprime la dépendance par rapport au pseudo-solide. On écrit donc l'équation résiduelle de Navier-Stokes de la manière suivante :

$$\mathbf{R}_{NS}(\boldsymbol{\chi}_{ps}) = \int_{\Omega_1^f(\boldsymbol{\chi}_{ps})} \mathbf{l}[\boldsymbol{\chi}_{ps}, \mathbf{u}_f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}_{ps})), p_f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}_{ps}))] \delta \mathbf{u}(\boldsymbol{\chi}_{ps}) d\Omega \quad (3.34)$$

La dépendance du terme $\mathbf{l}[\cdot, \cdot, \cdot]$ par rapport à $\boldsymbol{\chi}_{ps}$ implique seulement les fonctions d'interpolation et leurs dérivées. Voyons ceci plus concrètement. Soit ϕ_j la $j^{\text{ième}}$ fonctions d'interpolation sur un élément. On écrit la première composante de la vitesse de la façon suivante :

$$u_f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}_{ps})) = \phi_j(\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}_{ps})) u_j(\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}_{ps})) \quad (3.35)$$

Lorsque que l'on perturbe les déplacements $\boldsymbol{\chi}_{ps}$, on perturbe les fonctions d'interpolation, les fonctions tests et leur dérivée par rapport à $\boldsymbol{\chi}_{ps}$. Nous avons choisi de ne pas perturber les valeurs nodales de \mathbf{u}_f et p_f de l'équation (3.35). Nous avons vérifié que cette contribution n'affecte que très peu les résultats. Or, on écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{R}_{NS}(\boldsymbol{\chi}_{ps} + d\boldsymbol{\chi}_{ps})}{d\boldsymbol{\chi}_{ps}} &= \frac{1}{d\boldsymbol{\chi}_{ps}} \\ &\left[\int_{\Omega_1^f(\boldsymbol{\chi}_{ps} + d\boldsymbol{\chi}_{ps})} \mathbf{l}[\boldsymbol{\chi}_{ps} + d\boldsymbol{\chi}_{ps}, \mathbf{u}_f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}_{ps})), p_f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}_{ps}))] \delta \mathbf{u}(\boldsymbol{\chi}_{ps} + d\boldsymbol{\chi}_{ps}) d\Omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega_1^f(\boldsymbol{\chi}_{ps})} \mathbf{l}[\boldsymbol{\chi}_{ps}, \mathbf{u}_f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}_{ps})), p_f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}_{ps}))] \delta \mathbf{u}(\boldsymbol{\chi}_{ps}) d\Omega \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ces trois étapes clés sont implémentées à l'aide d'un élément d'interface utilisé pour appliquer les conditions (3.19) et (3.20), voir figure 3.4. Cet élément, décrit à la section 3.4, garantit la continuité des déplacements de part et d'autre de

l'interface ($\chi_{ps} = \chi_s$) ainsi que celle des forces à l'interface. Ces relations sont illustrées à la figure 3.4 où l'élément d'interface de gauche illustre la relation entre les déplacements tandis que celui de droite illustre la relation entre les contraintes à l'interface.

Cette stratégie de résolution est très robuste si on la compare avec une stratégie découplée dans laquelle le fluide et le solide sont traités séparément et en alternance. Lors d'une résolution découplée, le fluide communique les forces au solide qui se déplace, qui à son tour, communique le déplacement de la frontière au fluide. Plusieurs itérations sont nécessaires pour en arriver à un équilibre. En réalité, on s'approche de l'équilibre des forces au fur et à mesure des itérations mais sans jamais y arriver parfaitement. C'est l'un des désavantages des stratégies découplées. De plus, le découplage dégrade le taux de convergence de la méthode de Newton-Raphson. La stratégie adoptée ici, propose une formulation monolithique qui conduit à une convergence quadratique de la méthode de Newton-Raphson. Ceci est réalisé grâce à l'ajout d'inconnues supplémentaires comme celles associées au pseudo-solide et aux réactions et au traitement implicite et fortement couplée du système d'équations. La convergence quadratique de la méthode compense largement la lourdeur accrue du système d'équations. Dans bien des cas, le temps de calcul est largement diminué puisque la solution nécessite que 3 ou 4 itérations pour atteindre la convergence. Typiquement, on observe au minimum un ordre de grandeur quant à la réduction du nombre d'itérations.

3.6 Estimation d'erreur

L'estimation d'erreur permet au mailleur d'optimiser le maillage afin d'obtenir une meilleure solution éléments finis. Nous ne ferons pas la description détaillée du fonctionnement de l'adaptation de maillage. Le lecteur curieux peut consulter,

entre autres, les travaux de Hetu ^[21] et Turgeon ^[41].

On rencontre deux types d'erreurs : l'erreur exacte et l'erreur estimée. L'erreur exacte est la différence entre la solution éléments finis et la solution exacte. Tandis que l'erreur estimée est la différence entre la solution éléments finis et une distribution enrichie calculée à partir de la solution éléments finis. Par distribution enrichie, on entend un taux de convergence supérieur à celui de la solution numérique. Le lecteur intéressé à la façon dont est contruite cette distribution peut consulter les travaux de Hetu ^[21] et Turgeon ^[41].

Dans un contexte de remaillage adaptatif, on recherche une mesure élémentaire et même globale de l'erreur. Il devient donc nécessaire de définir des normes.

3.6.1 Norme pour le fluide

Dans le cas des équations de Navier-Stokes, on utilise une discrétisation linéaire et continue pour la pression et quadratique et continue pour la vitesse. Les normes naturelles pour ce problème sont :

– pour la pression :

$$\|p_f\|^2 = \int_{\Omega_f} p^2 d\Omega \quad (3.37)$$

– pour la vitesse :

$$\|\mathbf{u}_f\|^2 = \int_{\Omega_f} (\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T) : (\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T) d\Omega \quad (3.38)$$

$$= \int_{\Omega_f} 4\dot{\gamma}(\mathbf{u}_f) : \dot{\gamma}(\mathbf{u}_f) d\Omega \quad (3.39)$$

où $\dot{\gamma}(\mathbf{u}_f) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T)$.

Pour le calcul de l'erreur, on fait la différence entre la solution éléments finis et la distribution enrichie ou la solution exacte. On désigne la solution éléments finis par l'indice h et la distribution enrichie ou la solution exacte par \sim . Maintenant on peut définir les normes de l'erreur comme :

– pour la pression :

$$\|e^{p_f}\| = \left[\int_{\Omega_1^f} (\tilde{p} - p_h)^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.40)$$

– pour la vitesse :

$$\|e^{\mathbf{u}_f}\| = \left[\int_{\Omega_1^f} 4(\tilde{\gamma}(\mathbf{u}_f) - \dot{\gamma}_h(\mathbf{u}_f)) : (\tilde{\gamma}(\mathbf{u}_f) - \dot{\gamma}_h(\mathbf{u}_f)) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

3.6.2 Norme pour le solide

La norme énergie que nous utilisons pour le problème solide est une mesure qui fait intervenir les contraintes. On l'écrit comme suit :

$$\|\chi\|^2 = \int_{\Omega_1^s} \bar{\bar{\sigma}}_c : \bar{\bar{\sigma}}_c d\Omega \quad (3.42)$$

Si on se rappelle de l'expression de $\bar{\bar{\sigma}}_c$, équation 2.12, on a soit le choix d'utiliser la forme linéaire ou non linéaire de ce tenseur. Dans le cas de l'utilisation de la forme non linéaire du tenseur des contraintes, l'expression 3.42 n'est plus considérée comme une norme. Pour nous permettre d'utiliser cette norme, il faut considérer la forme linéaire du tenseur des contraintes de Cauchy.

Dans les cas d'application qui suivront, nous avons utilisé la forme linéaire du tenseur de déformation de Green-Lagrange. Il peut sembler surprenant d'utiliser une norme qui est définie par la forme linéaire du tenseur sur un champ de déplacement qui utilise la forme non linéaire de celui-ci. Cependant, les résultats obtenus par

l'estimateur d'erreur sont tout à fait satisfaisant. Donc, l'utilisation de cette norme ne semble pas trop dégrader le taux de convergence. Il faudra éventuellement se pencher sur cette question de définition.

Finalement, on procède de la même façon que pour la partie fluide : on calcule l'erreur en faisant la différence entre la solution éléments finis et la distribution enrichie ou la solution exacte. Le norme énergie de l'erreur s'écrit :

$$\|e^x\| = \left[\int_{\Omega_1} \left(\tilde{\bar{\sigma}}_c - \bar{\bar{\sigma}}_{c_h} \right) : \left(\tilde{\bar{\sigma}}_c - \bar{\bar{\sigma}}_{c_h} \right) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.43)$$

CHAPITRE 4

MÉTHODE DES SOLUTIONS MANUFACTURÉES EN INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE

Ce chapitre porte sur le développement d'une solution arbitraire utilisée dans la méthode des solutions manufacturées pour vérifier le code d'interactions fluide-structure. La méthode des solutions manufacturées sera appliquée au chapitre suivant pour créer un problème de vérification. Dans ce chapitre, on définit tout d'abord cette méthode. On poursuit avec la présentation des équations utilisées dans la vérification. On termine avec la description de la démarche qui mène au développement de cette solution analytique.

4.1 Méthode des solutions manufacturées

La vérification des codes de calcul est peu répandue en mécanique des fluides assistée par ordinateur. Ce n'est que très récemment, que l'on s'est attardé à la performance et la précision de résolution des équations par les solveurs. Bien que les équations implémentées dans les codes de calcul soient simples à résoudre à l'aide de la méthode des éléments finis, il est tout de même nécessaire de vérifier leur implémentation et la performance du résolveur. Ce sont les deux objectifs de la méthode des solutions manufacturées. Cette vérification est absolument nécessaire pour aborder en toute confiance les problèmes d'application qui feront l'objet d'analyses approfondies et de conclusions importantes. Il est nécessaire de distinguer la vérification de la validation. La validation se réfère à la comparaison d'un phénomène naturel avec les modèles mathématiques qui tentent de le décrire.

Tandis que la vérification se réfère à la comparaison d’une solution connue (exacte) tirée des équations qui nous intéressent avec la solution obtenue par le code de calcul résolvant ces équations. La comparaison se fait en évaluant l’erreur exacte qui est la différence entre la solution exacte et celle obtenue par le solveur. Ces solutions exactes doivent être suffisamment complexes pour faire activer tous les termes des équations implémentées dans le code de simulation. Cette recherche d’une solution exacte complexe permet de s’assurer que le code de calcul traite correctement tous les termes présents dans les équations. Pour évaluer la performance du solveur, on procède à une analyse de convergence sur un problème dont la solution est connue. De plus, on peut également évaluer la performance de notre estimateur d’erreur par projection en le comparant avec les valeurs d’erreur exacte obtenues.

La Méthode des Solutions Manufacturées (MSM) ^[33] propose une démarche générale pour générer des solutions analytiques adaptées à la vérification d’une partie ou de la totalité d’un code de calcul. Cette démarche se résume à choisir de façon arbitraire une solution qui ne satisfait pas les équations que l’on cherche à vérifier. On ajoute ensuite à ces équations les termes sources appropriés puis les conditions limites correspondantes. Enfin, on vérifie le tout avec une analyse de convergence sur différents maillages adaptés.

4.2 Équations à vérifier

Pour le domaine fluide, les équations à vérifier sont celles de Navier-Stokes : une équation pour la conservation de la masse (équation de continuité) et deux équations pour la conservation du mouvement. En axisymétrique, elles s’écrivent comme suit :

– Conservation de la masse :

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{v_f}{r} + \frac{\partial v_f}{\partial r} = 0 \quad (4.1)$$

- Conservation du mouvement dans la direction axiale :

$$\rho_f \left(u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p_f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu_f \frac{\partial u_f}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \right] + \rho_f f_x^f \quad (4.2)$$

- Conservation du mouvement dans la direction radiale :

$$\rho_f \left(u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p_f}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[2r\mu_f \frac{\partial v_f}{\partial r} \right] - 2\mu_f \frac{v_f}{r^2} + \rho_f f_r^f \quad (4.3)$$

La méthode des solutions manufacturées a comme principe d'utiliser les termes sources, f_x^f et f_r^f , pour que le champ de vitesse que nous avons choisi satisfasse les équations du mouvement. Ainsi, on peut choisir une fonction arbitraire pour u et v à la seule condition que l'équation de continuité et les conditions frontières soient satisfaites. On a le libre choix des distributions de viscosité et de pression. Il faut seulement s'assurer que la distribution de viscosité soit toujours positive dans le domaine fluide. Cette flexibilité nous sera utile pour satisfaire la condition de continuité des forces fluides et solides à l'interface décrite dans la section 2.4.

La difficulté principale vient du choix du domaine de calcul dans lequel le champ de vitesse choisi doit satisfaire l'équation de continuité et les conditions frontières associées au domaine choisi. Contrairement au cas cartésien, nous sommes limité, en axisymétrique, à ce qu'une frontière du domaine coïncide avec l'axe des x , soit avec la droite ayant pour équation $r = 0$. Cette droite est l'axe de symétrie du domaine. Il est préférable d'éviter le cas trivial d'un tube droit où l'écoulement est décrit par un écoulement de Poiseuille. Il a donc fallu développer une méthode pour trouver un écoulement à divergence nulle dans un tube axisymétrique de forme quelconque.

De ce résultat, on pourra appliquer la méthode des solutions manufacturées telle que présentée au chapitre 5. On verra en détail cette méthode dans la section 4.3.

Passons maintenant au deuxième groupe d'équations qui sont les conditions d'équilibre en mécanique du solide. En axisymétrique, ces équations s'écrivent comme suit :

– Dans la direction axiale :

$$\frac{\partial \sigma_{l_{xx}}}{\partial x} + \frac{\sigma_{l_{xr}}}{r} + \frac{\partial \sigma_{l_{xr}}}{\partial r} + f_x^s = 0 \quad (4.4)$$

– Dans la direction radiale :

$$\frac{\partial \sigma_{l_{rx}}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{l_{rr}}}{\partial r} + \frac{\sigma_{l_{rr}} - \sigma_{l_{\theta\theta}}}{r} + f_r^s = 0 \quad (4.5)$$

On note la présence de termes sources, f_x^s et f_r^s , dans les équations (4.4) et (4.5) qui décrivent le solide. Par contre, contrairement aux équations du fluide, il n'existe pas d'équations du même type que l'équation de continuité. On a donc aucune contrainte dans le choix d'un champ de déplacements quelconque. On aura juste à ajouter les termes sources appropriés pour que le champ de déplacements choisi satisfasse les équations d'équilibre. Quant au choix du module de Young et du coefficient de Poisson, E et ν , il est arbitraire. On verra en détail l'application de la méthode des solutions manufacturées dans le cas des équations d'équilibre pour le solide au chapitre 5.

Maintenant, il ne reste plus qu'à vérifier si le couplage fluide-solide est juste. Pour ce faire, il faut s'assurer que les contraintes fluides et solides sont égales à l'interface.

$$\bar{\bar{\sigma}}_c \cdot \mathbf{n}_s + \bar{\bar{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}_f = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{I_1} \quad (4.6)$$

Ce que nous avons pour l'instant, c'est un champ de vitesse et de déplacements. La seule flexibilité qui nous reste pour satisfaire l'équation 4.6 est le choix des distributions de viscosité et de pression. Par un choix judicieux, on pourra satisfaire l'équation 4.6 et du même coup vérifier le couplage fluide-solide. On verra la démarche pour obtenir de bonnes distributions de pression et de viscosité dans la section 4.3.

4.3 Démarche pour obtenir une solution manufacturée

Cette démarche pour appliquer la méthode des solutions manufacturées en interactions fluide-solide débute avec le choix d'un domaine de calcul fluide dans la configuration déformée. C'est-à-dire la forme qu'aura le domaine fluide une fois que le solide sera déformé sous les forces du fluide. Il ne faut pas perdre de vue que l'on doit trouver un champ de vitesse à divergence nulle dans le domaine fluide. C'est l'une des difficultés de la méthode. Pour palier à cette difficulté, nous avons développé une méthode qui permet de trouver un champ de vitesse à divergence nulle dans un tube axisymétrique de forme quelconque.

On considère un tube axisymétrique dont la paroi extérieure est définie par une fonction quelconque $f(x)$ telle qu'illustrée à la figure 4.1.

Le développement d'une solution manufacturée à divergence nulle nécessite que le champ de vitesse satisfasse les conditions suivantes :

1. $u = 0$ sur $r = r_{I_1}$
2. $v = 0$ sur $r = r_{I_1}$
3. $v = 0$ sur $r = 0$
4. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0$ dans Ω_1^f

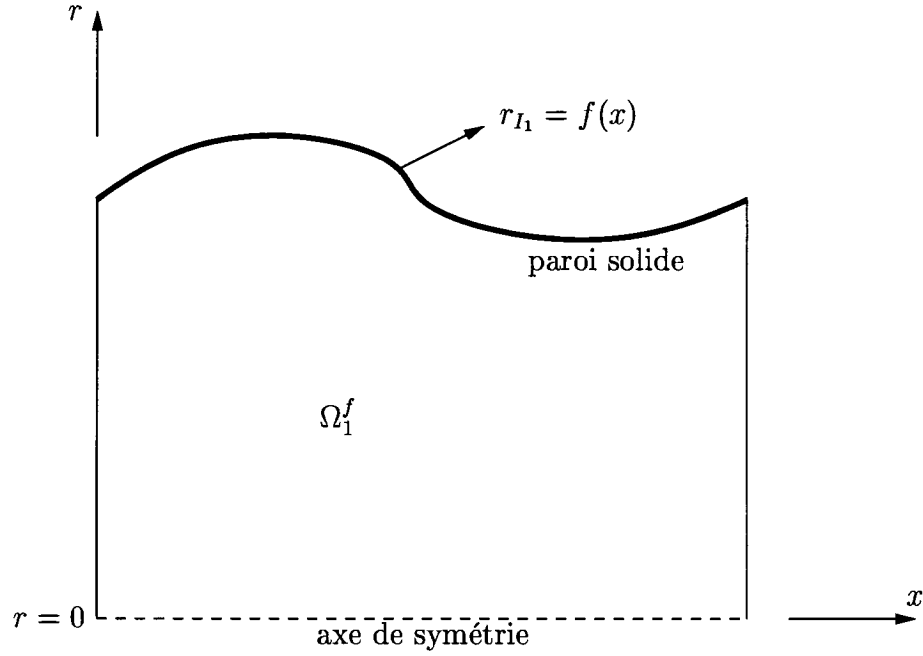


FIG. 4.1 Tube axisymétrique de forme quelconque

On choisi comme point de départ un profil de vitesse polynomial pour v qui satisfait les conditions 2 et 3. Par exemple, on peut utiliser :

$$v(x, r) = r^k(f(x) - r) \quad (4.7)$$

pour $k \geq 1$.

Dans le cas où l'on choisit $k = 1$, le profil de vitesse u résultant sera non nul sur la frontière inférieure. On aura donc un axe de symétrie en $r = 0$. Dans le cas où l'on choisit $k > 1$, on aura un profil de vitesse u qui sera nul sur cette frontière. On aura donc une paroi solide avec non glissement.

On multiplie $v(x, r)$ par une fonction quelconque de x , $G(x)$, pour se donner la

flexibilité requise pour satisfaire l'équation de continuité. On peut alors écrire :

$$v(x, r) = r^k(f(x) - r)G(x) \quad (4.8)$$

De l'équation de continuité, on en déduit que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (k+2)r^k G(x) - (k+1)r^{k-1} f(x)G(x) \quad (4.9)$$

que l'on intègre par rapport à x pour obtenir $u(x, r)$:

$$u(x, r) = (k+2)r^k \int G(x)dx - (k+1)r^{k-1} \int f(x)G(x)dx + H(r) \quad (4.10)$$

Le choix de la fonction $G(x)$ est important. Il doit permettre l'évaluation des intégrales dans l'expression de u . On peut écrire $G(x)$ sous la forme suivante :

$$G(x) = K[f(x)]f'(x) \quad (4.11)$$

en portant une attention particulière sur la forme de $K[f(x)]$.

Le champ de vitesse u s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, r) &= (k+2)r^k \int K[f(x)]f'(x)dx \\ &- (k+1)r^{k-1} \int f(x)K[f(x)]f'(x)dx + H(r) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$= (k+2)r^k M[f(x)] - (k+1)r^{k-1} L[f(x)] + H(r) \quad (4.13)$$

où les fonctions $M[f(x)]$ et $L[f(x)]$ sont les primitives de $\int K[f(x)]f'(x)dx$ et de $\int f(x)K[f(x)]f'(x)dx$ respectivement.

Jusqu'ici, les expressions de u et de v satisfont les conditions 2, 3 et 4. Pour respecter

la condition 1, il suffit d'ajuster la fonction $H(r)$ pour que $u(x, r = r_{I_1}) = 0$. Donc :

$$u(x, r = r_{I_1}) = (k+2)r_{I_1}^k M[f(x)] - (k+1)r_{I_1}^{k-1} L[f(x)] + H(r_{I_1}) \quad (4.14)$$

$$= (k+2)f(x)^k M[f(x)] - (k+1)f(x)^{k-1} L[f(x)] + H(r_{I_1}) \quad (4.15)$$

$$= 0 \quad (4.16)$$

puisque $r_{I_1} = f(x)$

On en déduit que :

$$H(r_{I_1}) = (k+1)f(x)^{k-1} L[f(x)] - (k+2)f(x)^k M[f(x)] \quad (4.17)$$

Or, comme $f(x) = r_{I_1}$, on a $H(r_{I_1}) = (k+1)r_{I_1}^{k-1} L[r_{I_1}] - (k+2)r_{I_1}^k M[r_{I_1}]$, on en conclut que :

$$H(r) = (k+1)r^{k-1} L[r] - (k+2)r^k M[r] \quad (4.18)$$

On obtient le champ de vitesse suivant :

$$\begin{cases} u(x, r) &= (k+2)r^k [M[f(x)] - M(r)] - (k+1)r^{k-1} [L[f(x)] - L(r)] \\ v(x, r) &= r^k (f(x) - r) K[f(x)] f'(x) \end{cases} \quad (4.19)$$

qui satisfait les 4 conditions de départ.

Par exemple on peut montrer la versatilité de la méthode développée, en prenant une paroi solide dont la géométrie est décrite par :

$$f(x) = 1 + h \left[2 - \cos(2\pi x) - \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) \right] e^{\frac{x}{5}} \quad (4.20)$$

On choisi $K[f(x)] = f(x)$ et $k = 1$ (vitesse u non nulle sur l'axe de symétrie). Ce

choix implique :

$$M[f(x)] = \frac{f(x)^2}{2} = \frac{\left(1 + h \left[2 - \cos(2\pi x) - \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\right] e^{\frac{x}{5}}\right)^2}{2} \quad (4.21)$$

$$L[f(x)] = \frac{f(x)^3}{3} = \frac{\left(1 + h \left[2 - \cos(2\pi x) - \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\right] e^{\frac{x}{5}}\right)^3}{3} \quad (4.22)$$

$$M[r] = \frac{r^2}{2} \quad (4.23)$$

$$L[r] = \frac{r^3}{3} \quad (4.24)$$

Le champ de vitesse à divergence nulle associé à ce tube est donné par :

$$\begin{cases} u(x, r) = \frac{3r}{2} \left(1 + h \left[2 - \cos(2\pi x) - \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\right] e^{\frac{x}{5}}\right)^2 \\ \quad - \frac{2}{3} \left(1 + h \left[2 - \cos(2\pi x) - \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\right] e^{\frac{x}{5}}\right)^3 - \frac{5}{6} r^3 \\ v(x, r) = 2\pi r \left(1 + h \left[2 - \cos(2\pi x) - \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\right] e^{\frac{x}{5}} - r\right) \\ \quad \left(1 + h \left[2 - \cos(2\pi x) - \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right)\right] e^{\frac{x}{5}}\right) \sin(2\pi x) \end{cases} \quad (4.25)$$

et est illustré à la figure 4.2 pour $h = 0, 1$ et $x = [0, 5]$.

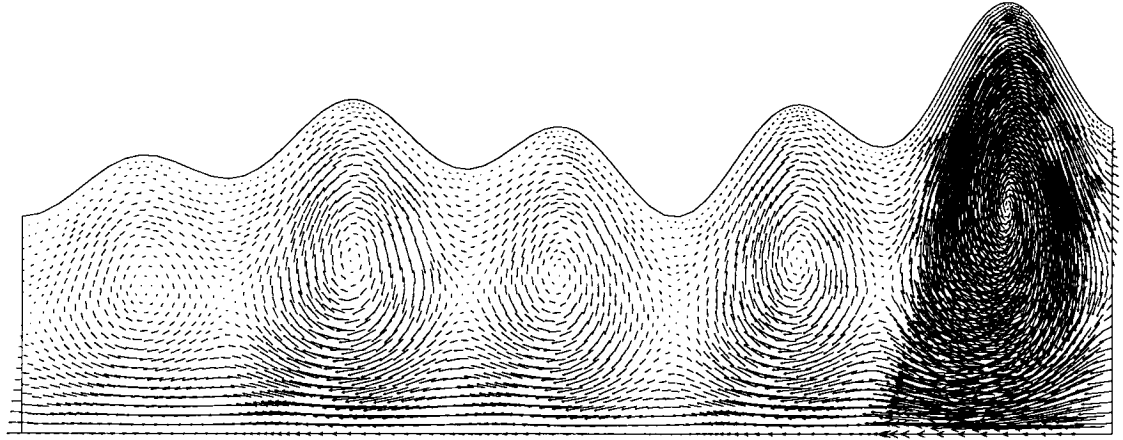


FIG. 4.2 Champ de vecteurs vitesse à divergence nulle.

Fermons la parenthèse et revenons sur notre cas arbitraire décrit par la figure 4.1

On met de côté pour l'instant le choix des distributions de viscosité et de pression puisqu'elles seront déterminées par l'équilibre des forces fluides et solides à l'interface. On verra en détail la procédure à suivre pour définir ces distributions.

Maintenant que nous avons la configuration déformée pour le fluide, figure 4.1, on doit choisir un champ de déplacements pour le solide qui soit compatible avec le domaine fluide dans la configuration déformée. C'est-à-dire que le champ de déplacements choisi doit déformer le solide de façon à ce que la frontière qui correspond à l'interface fluide-solide ait la même équation que celle du fluide. De cette façon, on assure la continuité des déplacements telle que prescrite par l'équation 3.20. On fait un choix réfléchi du champ de déplacements que l'on écrit :

$$\xi = \xi(x, r) \quad (4.26)$$

$$\eta = \eta(x, r) \quad (4.27)$$

La configuration non déformée du solide peut-être de forme arbitraire. Une fois que le champ de déplacements approprié est appliqué sur le solide, on obtient la configuration déformée du solide. L'équation de la frontière qui correspond à l'interface, qui est maintenant identique à celle du fluide dans même configuration, s'écrit :

$$r_{I_1}(x) = r_{I_0}(x) + \xi(x, r = r_{I_0}(x)) + \eta(x, r = r_{I_0}(x)) = f(x) \quad (4.28)$$

Nous avons donc la description des configurations non déformée et déformée du solide, illustrées à la figure 4.3.

On peut maintenant illustrer voir de façon claire le problème fluide-solide dans ces deux configurations à la figure 4.4.

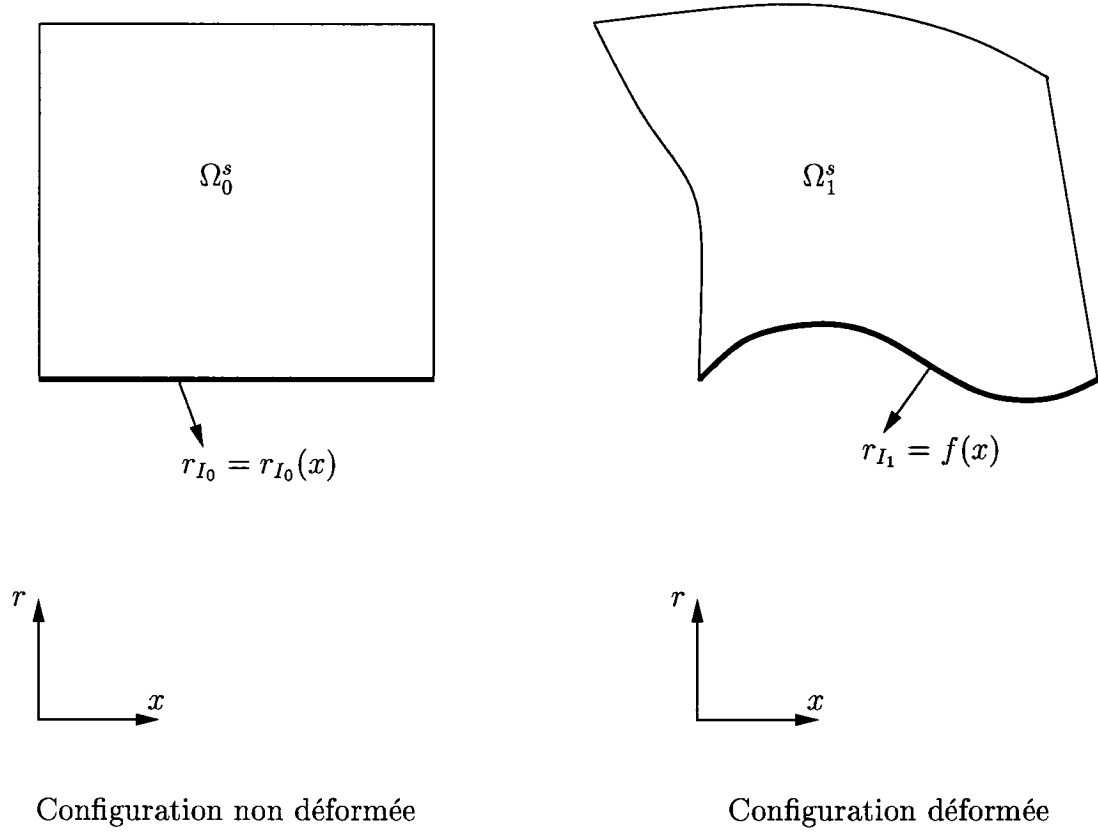


FIG. 4.3 Configuration non déformée et déformée du solide.

La dernière étape consiste à assurer la continuité des forces fluides et solides à l'interface fluide-solide grâce à un choix judicieux des distributions de pression et de viscosité. On écrit la condition de continuité de la manière suivante :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_c \cdot \mathbf{n} = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{I_1} \quad (4.29)$$

puisque $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1^f = -\mathbf{n}_1^s$ à l'interface.

On développe l'équation 4.29 en x et r qui s'écrit :

$$\sigma_{c_{xx}} n_x + \sigma_{c_{xr}} n_r = \sigma_{f_{xx}} n_x + \sigma_{f_{xr}} n_r \quad (4.30)$$

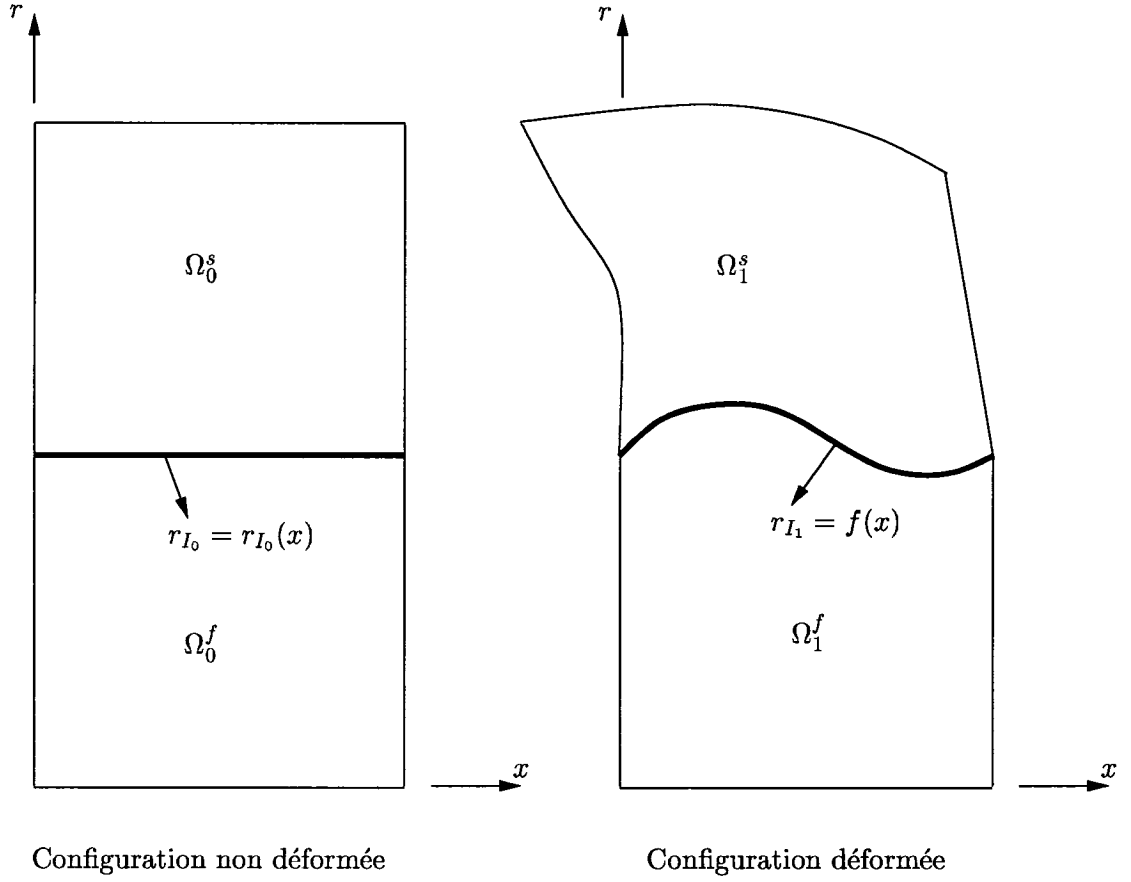


FIG. 4.4 Configuration non déformée et déformée du problème fluide-solide.

$$\sigma_{c_{rx}} n_x + \sigma_{c_{rr}} n_r = \sigma_{f_{rx}} n_x + \sigma_{f_{rr}} n_r \quad (4.31)$$

On simplifie l'écriture en posant $S_x = \sigma_{c_{xx}} n_x + \sigma_{c_{xr}} n_r$, $S_r = \sigma_{c_{rx}} n_x + \sigma_{c_{rr}} n_r$ et on écrit les composantes du tenseur des contraintes fluides :

$$S_x = \left(2\mu_f \frac{\partial u_f}{\partial x} - p_f \right) n_x + \mu_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) n_r \quad (4.32)$$

$$S_r = \mu_f \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) n_x + \left(2\mu_f \frac{\partial v_f}{\partial r} - p_f \right) n_r \quad (4.33)$$

Il suffit maintenant de résoudre le système d'équations pour obtenir la distribution de pression et de viscosité à l'interface fluide-solide :

$$\mu_f = \frac{S_x n_r - S_r n_x}{-\mathbf{B}n_x^2 - \mathbf{C}n_x n_r + \mathbf{A}n_x n_r + \mathbf{B}n_r^2} \quad (4.34)$$

$$p_f = \frac{-\mathbf{A}S_r n_x - \mathbf{B}S_r n_r + \mathbf{B}S_x n_x + \mathbf{C}S_x n_r}{-\mathbf{B}n_x^2 - \mathbf{C}n_x n_r + \mathbf{A}n_x n_r + \mathbf{B}n_r^2} \quad (4.35)$$

où $\mathbf{A} = 2\frac{\partial u}{\partial x}$, $\mathbf{B} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ et $\mathbf{C} = 2\frac{\partial v}{\partial r}$.

Il faut noter que le tenseur des contraintes de Cauchy dans le solide, $\overline{\overline{\sigma}}_c$, tel que nous l'avons vu, correspond aux contraintes dans la configuration déformée en fonction de la surface déformée. Dans l'équation 4.29, on le projette sur la normale de l'interface déformée et on évalue en $r = r_{I_0}(x)$ pour obtenir les distributions des contraintes normales et tangentielles agissant sur l'interface. Il ne faut pas croire qu'en appliquant $r = r_{I_0}(x)$ on évalue les contraintes à l'interface non déformée. En fait, on les évalue bien sur l'interface déformée mais par rapport aux coordonnées d'origine qui ont servies à définir le problème. La transformation faisant le passage de la configuration non déformée, $r = r_{I_0}(x)$, à la configuration déformée, $r = r_{I_0}(x) + \xi(x, r = r_{I_0}(x)) + \eta(x, r = r_{I_0}(x)) = r_{I_1}(x)$ est déjà incluse dans l'expression des contraintes de Cauchy par le biais de $\overline{\overline{\mathbf{F}}}^T$ dans l'équation 2.12. À titre de comparaison, le tenseur de Piola-Lagrange représente les contraintes solides dans la configuration déformée en fonction de la surface non déformée. En jetant un oeil sur l'expression de ce tenseur, équation 2.11, on note l'absence de $\overline{\overline{\mathbf{F}}}^T$ qui correspond au passage d'une surface non déformée à une surface déformée.

Par contre, il faut évaluer le tenseur des contraintes fluides dans la configuration déformée. C'est à dire qu'on le projette sur la normale de l'interface déformée et on l'évalue en $r = r_{I_1}(x)$.

Les distributions de viscosité et de pression que l'on obtient sont celles définies

à l'interface. Elles sont donc uniquement fonction de x puisqu'on évalue tous les termes en $r = r_{I_0}(x)$ et en $r = r_{I_1}(x)$. On génère une extension de ces distributions en les considérant constantes dans la direction radiale.

On précise que la distribution de pression peut-être arbitraire. Par contre celle de la viscosité doit absolument être positive dans tout le domaine fluide. Une viscosité négative engendre des instabilités. Il est toujours possible de modifier la distribution de viscosité en ajustant le champ de déplacements puisque μ_f en dépend. Il faut cependant s'assurer que l'interface du côté solide dans la configuration déformée corresponde toujours à $f(x)$. Le premier élément à considérer pour agir sur la distribution de viscosité est le champ de déplacements en ξ . Il a pour effet de décaler la courbe de viscosité; on peut donc la décaler suffisamment pour assurer une distribution de viscosité positive à l'interface. On verra cet aspect en détail avec un exemple concret au chapitre 5.

Il ne reste plus qu'à calculer les termes sources pour les équations fluides et solides. Pour le fluide, les termes sources des équations du mouvement sont les suivants :

$$\begin{aligned} f_x^f &= \rho_f \left(u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_f}{\partial x} \\ &\quad - \mu \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial r^2} \right) - 2 \frac{\partial \mu_f}{\partial x} \frac{\partial u_f}{\partial x} - \frac{\partial \mu_f}{\partial r} \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} f_r^f &= \rho_f \left(u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_f}{\partial r} \\ &\quad - \mu_f \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial r^2} + \frac{v_f}{r^2} \right) - \frac{\partial \mu_f}{\partial x} \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \\ &\quad - 2 \frac{\partial \mu_f}{\partial r} \frac{\partial v_f}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Notons que les distributions de viscosité et de pression sont des fonctions de x telles que $\mu_f = \mu_f(x)$ et $p_f = p_f(x)$. Il faut donc inclure la dérivée de la viscosité et de

la pression par rapport à x dans les termes sources. Il est nécessaire de calculer leurs dérivées une fois qu'on les a évaluées à l'interface fluide-solide. En effet, il faut tenir compte de la dépendance en x de l'interface dans la configuration déformée pour s'assurer de calculer les bonnes dérivées. Pour les termes issus des contraintes solides, on évalue les composantes du tenseur en $r = r_{I_0}(x)$. Il est donc également nécessaire de prendre la même précaution puisqu'il existe une dépendance en x qui intervient dans l'évaluation des composantes du tenseur. On utilise le champ de vitesse établi précédemment pour tous les autres termes.

On procède de la même manière pour obtenir les termes sources nécessaires pour les équations d'équilibre du solide. On déduit des équations 2.18 et 2.19 les termes sources suivant :

$$f_x^s = - \left(\frac{\partial \sigma_{l_{xx}}}{\partial x} + \frac{\sigma_{l_{xr}}}{r} + \frac{\partial \sigma_{l_{xr}}}{\partial r} \right) \quad (4.38)$$

$$f_r^s = - \left(\frac{\partial \sigma_{l_{rx}}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{l_{rr}}}{\partial r} + \frac{\sigma_{l_{rr}} - \sigma_{l_{\theta\theta}}}{r} \right) \quad (4.39)$$

Une fois les termes sources obtenus, il suffit de les intégrer dans le code et d'appliquer les conditions frontières appropriées tirées de la solution manufacturée. On verra en détail l'expression des termes sources et l'application de la méthode des solutions manufacturées au chapitre suivant.

CHAPITRE 5

VÉRIFICATION

Ce chapitre porte sur l'application de la méthode des solutions manufacturées. On y présente le cas qui sera utilisé pour vérifier le code de calcul. On procède ensuite à une analyse de convergence pour évaluer la performance du code et celle de l'estimateur d'erreur. On termine ce chapitre par une conclusion sur les résultats obtenus.

5.1 Écoulement dans un tuyau flexible

Cette exemple est consacré à la vérification du code de calcul. Il est fortement inspiré d'un écoulement réel dans une artère flexible. La similitude entre ce cas de vérification et les cas d'application présentés au chapitre suivant apporte beaucoup de crédibilité quant à la vérification rigoureuse de tous les termes des équations du problème fluide-solide.

5.1.1 Description du problème

La fonction sinusoïdale que nous avons choisie pour décrire la forme de l'interface est décrite par l'expression suivante :

$$r_{I_1}(x) = 1 + h(1 - \cos(2\pi x)) \quad (5.1)$$

et illustrée à la figure 5.1

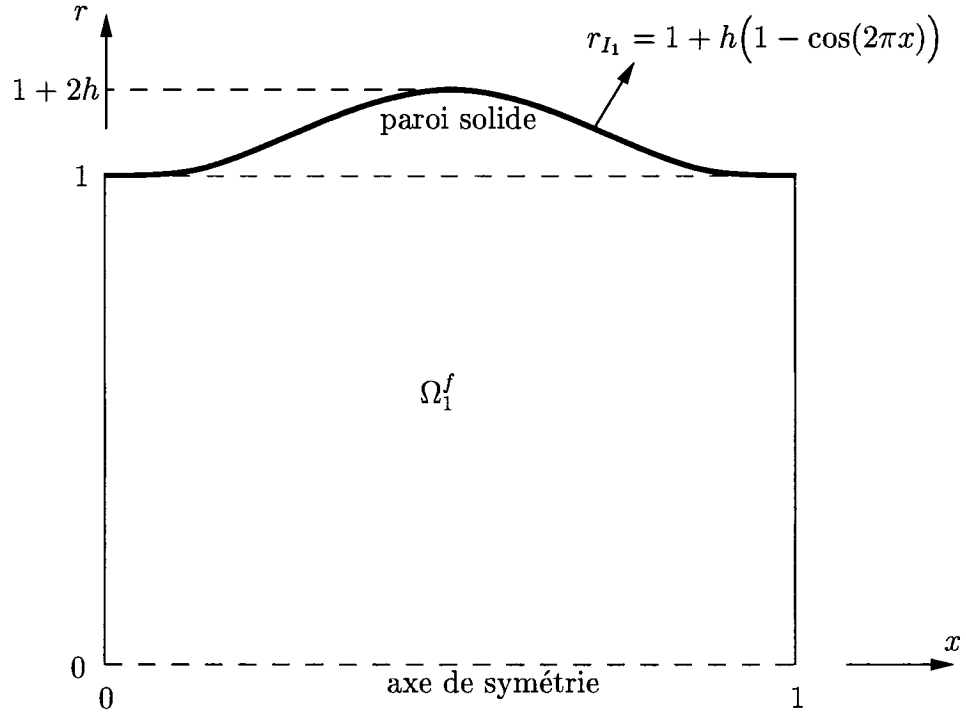


FIG. 5.1 Tube axisymétrique sinusoidale.

Pour ce cas d'écoulement, nous choisissons $K[f(x)] = 1$ et $k = 1$ (vitesse u non nulle sur l'axe de symétrie). Ce choix implique :

$$M[f(x)] = f(x) = 1 + h(1 - \cos(2\pi x)) \quad (5.2)$$

$$L[f(x)] = \frac{f(x)^2}{2} = \frac{[1 + h(1 - \cos(2\pi x))]^2}{2} \quad (5.3)$$

$$M[r] = r \quad (5.4)$$

$$L[r] = \frac{r^2}{2} \quad (5.5)$$

Il en résulte le champ de vitesse suivant :

$$\begin{cases} u(x, r) = 3r[1 + h(1 - \cos(2\pi x))] - [1 + h(1 - \cos(2\pi x))]^2 - 2r^2 \\ v(x, r) = 2\pi r[1 + h(1 - \cos(2\pi x)) - r] \sin(2\pi x) \end{cases} \quad (5.6)$$

qui est illustré à la figure 5.2 pour une valeur de $h = 0,03$.

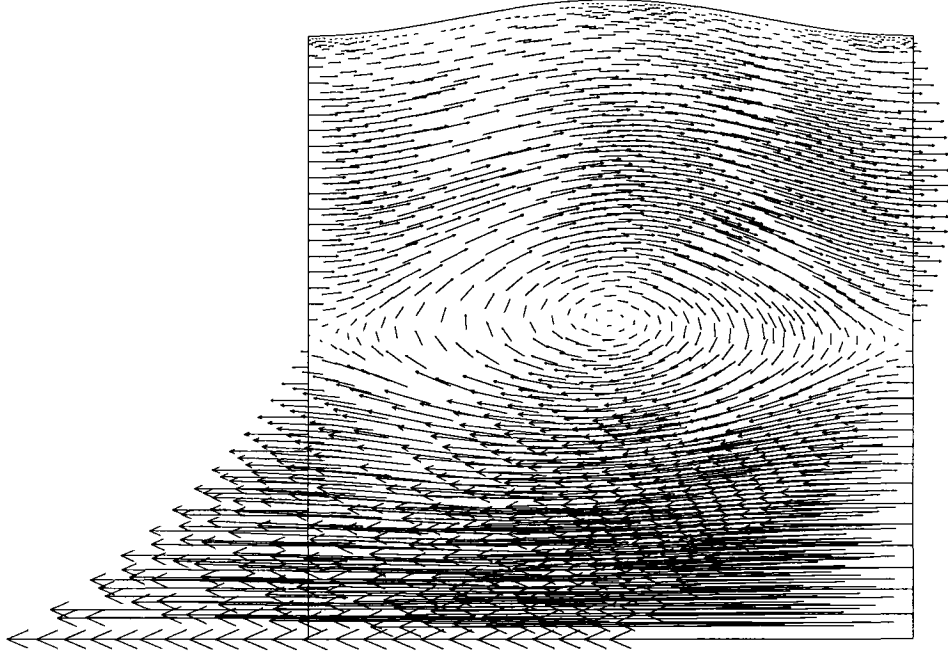


FIG. 5.2 Champ de vecteurs vitesse à divergence nulle.

Maintenant que nous avons la configuration déformée du domaine fluide, figure 5.1, on doit choisir un champ de déplacements pour le solide de façon à ce que la frontière correspondant à l'interface fluide-solide ait la même forme que celle du fluide. On assure ainsi la continuité des déplacements prescrite par l'équation (3.20). La configuration non déformée du solide est un carré unitaire dont la frontière du bas correspond à l'interface fluide-solide. Une fois ce champ de déplacements

appliqué sur le solide, on obtient la configuration déformée du solide. Nous avons :

$$\xi = \frac{1}{4}(1 - r) \quad (5.7)$$

$$\eta = (2 - r)h(1 - \cos(2\pi x)) \quad (5.8)$$

Nous avons donc la description des configurations non déformée et déformée du solide, illustrée à la figure 5.3.

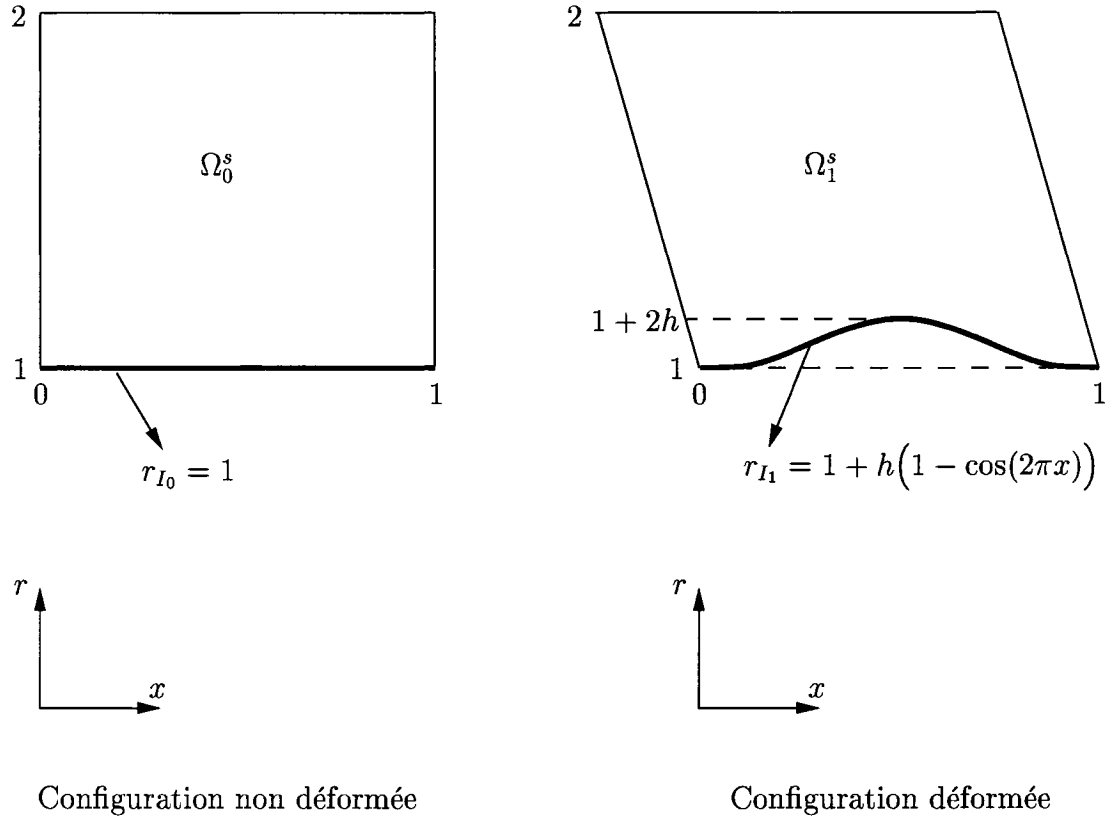


FIG. 5.3 Configurations du solide.

Avec la description du solide qui s'ajoute à celle du fluide, on peut maintenant voir de façon claire à la figure 5.4 le problème fluide-solide dans ces deux configurations.

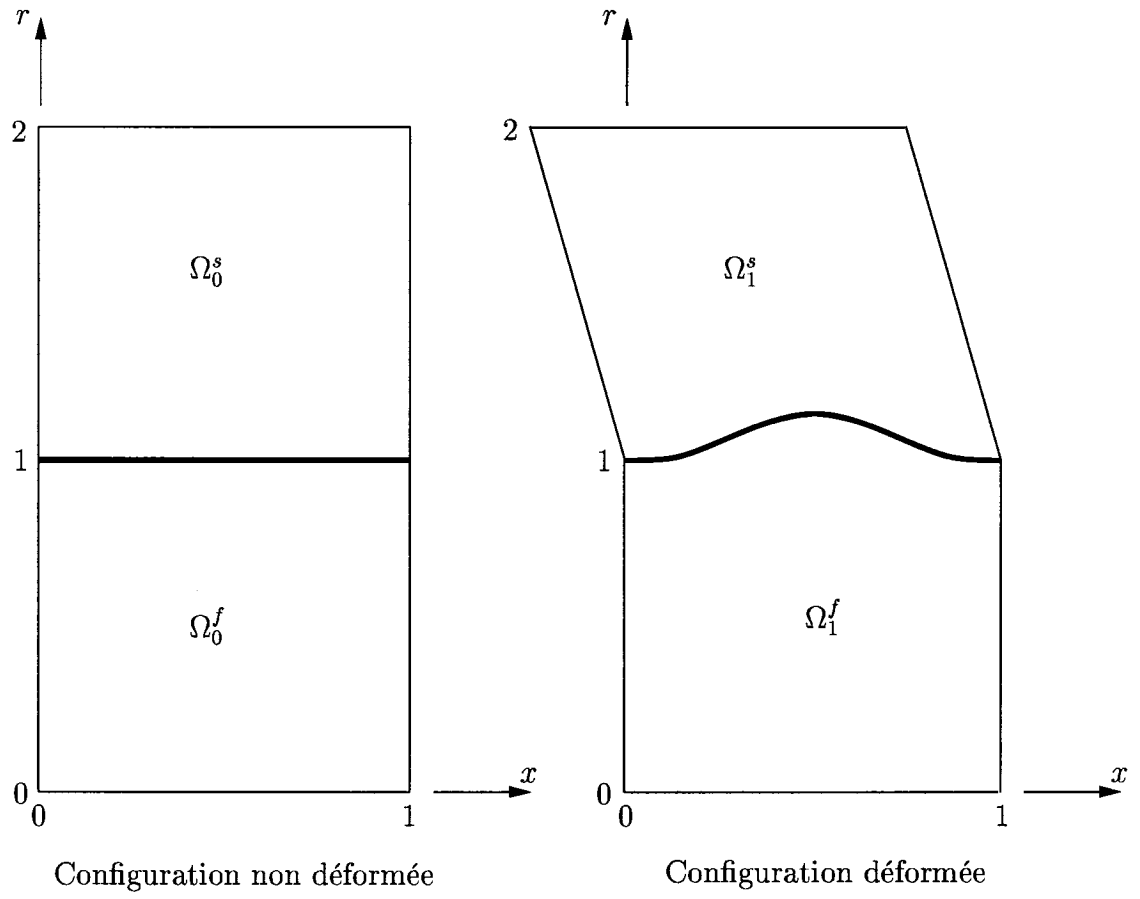


FIG. 5.4 Configurations du problème fluide-solide.

Maintenant que nous avons le champ de vitesse dans le fluide et le champ de déplacements dans le solide, on peut passer au calcul des distributions de viscosité et de pression nécessaires pour satisfaire la continuité des forces à l'interface. On rappelle que :

$$\mu_f = \frac{S_x n_r - S_r n_x}{-\mathbf{B}n_x^2 - \mathbf{C}n_x n_r + \mathbf{A}n_x n_r + \mathbf{B}n_r^2} \quad (5.9)$$

$$p_f = \frac{-\mathbf{A}S_r n_x - \mathbf{B}S_r n_r + \mathbf{B}S_x n_x + \mathbf{C}S_x n_r}{-\mathbf{B}n_x^2 - \mathbf{C}n_x n_r + \mathbf{A}n_x n_r + \mathbf{B}n_r^2} \quad (5.10)$$

où $\mathbf{A} = 2\frac{\partial u}{\partial x}$, $\mathbf{B} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ et $\mathbf{C} = 2\frac{\partial v}{\partial r}$.

Ces deux relations ont l'avantage d'être générales et applicables à n'importe lequel des champs de vitesse et de déplacements. Il suffit de calculer chacun des termes correctement en les projetant et les évaluant dans la bonne configuration.

On développe ici chacun des termes de ces deux relations. Pour les termes S_x et S_r , il nous faut quelques résultats préliminaires :

– Équation de l'interface dans la configuration non déformée :

$$r_{I_0} = 1 \quad (5.11)$$

– Composantes du tenseur gradient des déformations, $\overline{\mathbf{h}}$:

$$\begin{aligned} h_{xx} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 & h_{xr} &= \frac{\partial \xi}{\partial r} = -\frac{1}{4} \\ h_{x\theta} &= \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0 \\ h_{rx} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2(2 - r_{I_0})h \sin(2\pi x)\pi & h_{rr} &= \frac{\partial \eta}{\partial r} = -h(1 - \cos(2\pi x)) \\ h_{r\theta} &= \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 0 \\ h_{\theta x} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 & h_{\theta r} &= \frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0 \\ h_{\theta\theta} &= \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = \frac{(2-r_{I_0})h(1-\cos(2\pi x))}{r_{I_0}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

– Tenseur de passage de la configuration non déformée à celle déformée, $\overline{\mathbf{F}}$:

$$\begin{aligned}
F_{xx} &= 1 & F_{xr} &= h_{xr} & F_{x\theta} &= 0 \\
F_{rx} &= h_{rx} & F_{rr} &= 1 + h_{rr} & F_{r\theta} &= 0 \\
F_{\theta x} &= 0 & F_{\theta r} &= 0 & F_{\theta\theta} &= 1 + h_{\theta\theta}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

– Le déterminant de la transformation $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$, J :

$$J = F_{\theta\theta} (F_{xx}F_{rr} - F_{xr}F_{rx}) \tag{5.14}$$

– Tenseur des déformations non linéaire de Green-Lagrange, $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$:

$$\begin{aligned}
E_{xx} &= \frac{1}{2} (h_{xx} + h_{xx}) + \frac{1}{2} (h_{xx}h_{xx} + h_{rx}h_{rx}) \\
E_{xr} &= \frac{1}{2} (h_{rx} + h_{xr}) + \frac{1}{2} (h_{11}h_{xr} + h_{rx}h_{rr}) & E_{x\theta} &= 0 \\
E_{rx} &= \frac{1}{2} (h_{xr} + h_{rx}) + \frac{1}{2} (h_{xr}h_{xx} + h_{rr}h_{rx}) \\
E_{rr} &= \frac{1}{2} (h_{rr} + h_{rr}) + \frac{1}{2} (h_{xr}h_{xr} + h_{rr}h_{rr}) & E_{r\theta} &= 0 \\
E_{\theta x} &= 0 \\
E_{\theta r} &= 0 & E_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} (h_{\theta\theta} + h_{\theta\theta}) + \frac{1}{2} (h_{\theta\theta}h_{\theta\theta})
\end{aligned} \tag{5.15}$$

– La trace du tenseur des déformations non linéaire de Green-Lagrange :

$$tr(\overline{\overline{\mathbf{E}}}) = E_{xx} + E_{rr} + E_{\theta\theta} \tag{5.16}$$

– Propriétés physique du solide :

$$\begin{aligned}
E &= 2 & \lambda_s &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0.227 \\
\nu &= 0.1 & \mu_s &= \frac{E}{2(1+\nu)} = 0.90
\end{aligned} \tag{5.17}$$

– Loi de comportement pour un matériau de type St. Venant-Kirchoff, $\overline{\overline{\sigma}}_k$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{k_{xx}} &= \lambda_s tr(\overline{\overline{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{xx} & \sigma_{k_{xr}} &= \lambda_s tr(\overline{\overline{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{xr} & \sigma_{k_{x\theta}} &= 0 \\
\sigma_{k_{rx}} &= \lambda_s tr(\overline{\overline{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{rx} & \sigma_{k_{rr}} &= \lambda_s tr(\overline{\overline{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{rr} & \sigma_{k_{r\theta}} &= 0 \\
\sigma_{k_{\theta x}} &= 0 & \sigma_{k_{\theta r}} &= 0 & \sigma_{k_{\theta\theta}} &= \lambda_s tr(\overline{\overline{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{\theta\theta}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

– Contraintes de Cauchy, $\overline{\overline{\sigma}}_c$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{c_{xx}} &= \frac{1}{J} \left[F_{xx} (\sigma_{k_{xx}} F_{xx} + \sigma_{k_{xr}} F_{xr}) + F_{xr} (\sigma_{k_{rx}} F_{xx} + \sigma_{k_{rr}} F_{xr}) \right] \\
\sigma_{c_{xr}} &= \frac{1}{J} \left[F_{xx} (\sigma_{k_{xx}} F_{rx} + \sigma_{k_{xr}} F_{rr}) + F_{xr} (\sigma_{k_{rx}} F_{rx} + \sigma_{k_{rr}} F_{rr}) \right] \\
\sigma_{c_{x\theta}} &= 0 \\
\sigma_{c_{rx}} &= \frac{1}{J} \left[F_{rx} (\sigma_{k_{xx}} F_{xx} + \sigma_{k_{xr}} F_{xr}) + F_{rr} (\sigma_{k_{rx}} F_{xx} + \sigma_{k_{rr}} F_{xr}) \right] \\
\sigma_{c_{rr}} &= \frac{1}{J} \left[F_{rx} (\sigma_{k_{xx}} F_{rx} + \sigma_{k_{xr}} F_{rr}) + F_{rr} (\sigma_{k_{rx}} F_{rx} + \sigma_{k_{rr}} F_{rr}) \right] \\
\sigma_{c_{r\theta}} &= 0 \\
\sigma_{c_{\theta x}} &= 0 \\
\sigma_{c_{\theta r}} &= 0 \\
\sigma_{c_{\theta\theta}} &= \frac{1}{J} \left[F_{\theta\theta} \sigma_{k_{\theta\theta}} F_{\theta\theta} \right]
\end{aligned} \tag{5.19}$$

– Composantes de la normale de l'interface dans la configuration déformée :

$$\begin{aligned}
n_x &= -2h \sin(2\pi x) \pi \\
n_r &= 1
\end{aligned} \tag{5.20}$$

– Finalement, les expressions des termes S_x et S_r :

$$\begin{aligned}
S_x &= \sigma_{c_{11}} n_x + \sigma_{c_{12}} n_r \\
S_r &= \sigma_{c_{21}} n_x + \sigma_{c_{22}} n_r
\end{aligned} \tag{5.21}$$

On note que S_x et S_r correspondent aux composantes du tenseur des contraintes de Cauchy projetées sur la normale dans la configuration déformée mais évaluées à l'interface dans la configuration non déformée ($r_{I_0} = 1$). Voir les détails au chapitre précédent.

Pour les autres termes liés au champ de vitesse, on a :

– Équation de l'interface dans la configuration déformée :

$$r_{I_1} = 1 + h(1 - \cos(2\pi x)) \tag{5.22}$$

– Termes relatifs au champ de vitesse :

$$\mathbf{A} = 12r_{I_1} h \sin(2\pi x) \pi - 8 \left[1 + h(1 - \cos(2\pi x)) \right] h \sin(2\pi x) \pi \tag{5.23}$$

$$\mathbf{B} = 3 + 3h(1 - \cos(2\pi x)) - 4r_{I_1} \tag{5.24}$$

$$+4r_{I_1}h^2\sin^2(2\pi x)\pi^2 \quad (5.25)$$

$$+4r_{I_1}\left[1+h\left(1-\cos(2\pi x)\right)-r_{I_1}\right]h\cos(2\pi x)\pi^2 \quad (5.26)$$

$$\mathbf{C} = 4\left[1+h\left(1-\cos(2\pi x)\right)-2r_{I_1}\right]h\sin(2\pi x)\pi \quad (5.27)$$

On note que les termes **A**, **B** et **C** sont évalués sur l'interface déformée.

Maintenant que nous avons développé et calculé tous les termes, on peut à présent obtenir les distributions de viscosité et de pression à l'interface qui, comme on l'a dit précédemment, sont fonction de x seulement. Il est nécessaire de vérifier la positivité de la distribution de la viscosité à l'interface. La figure 5.5 montre les distributions de pression et de viscosité pour $h = 0.03$. Dans le cas d'une distribution de viscosité ayant des valeurs négatives il aurait fallu modifier le champ de déplacements du solide.

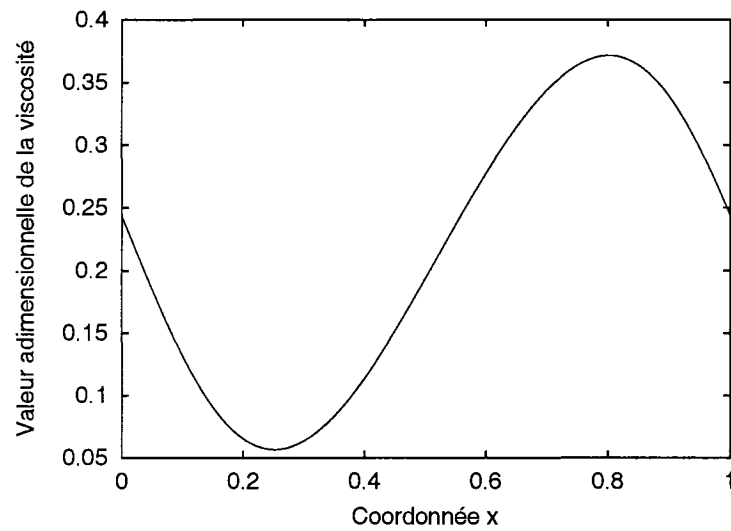
Par exemple, le premier champ de déplacements que nous avons choisi pour en déduire les distributions de viscosité et de pression était :

$$\xi = 0 \quad (5.28)$$

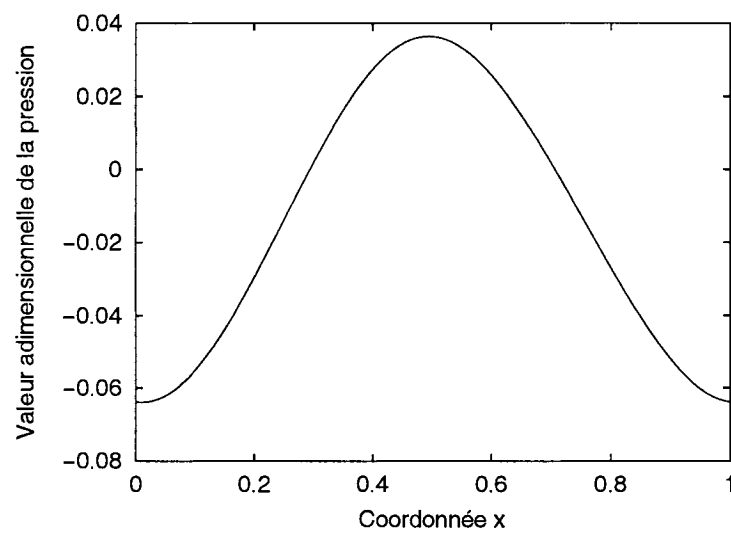
$$\eta = (2-r)h\left(1-\cos(2\pi x)\right) \quad (5.29)$$

qui conduisent aux distributions illustrées à la figure 5.6. On remarque très rapidement que la viscosité est négatives pour $x \in [0, 0.5]$. L'effet du champ de déplacements en ξ sur la distribution de viscosité à l'interface est immédiat. Pour corriger ce problème on ajoute, dans le solide, un cisaillement non nul à l'interface, équation (5.7). Ceci a pour conséquence d'ajouter une constante à la distribution de viscosité et ainsi de la rendre partout positive, voir figure 5.5. Ce sont les distributions de pression et de viscosité que l'on utilise dans ce cas de vérification.

Le problème est à présent défini complètement. Nous avons le champ de vitesse, le

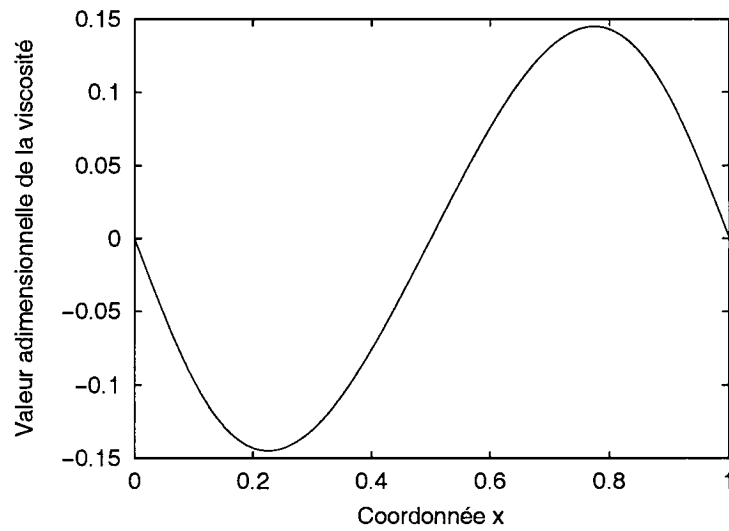


Distribution de la viscosité.

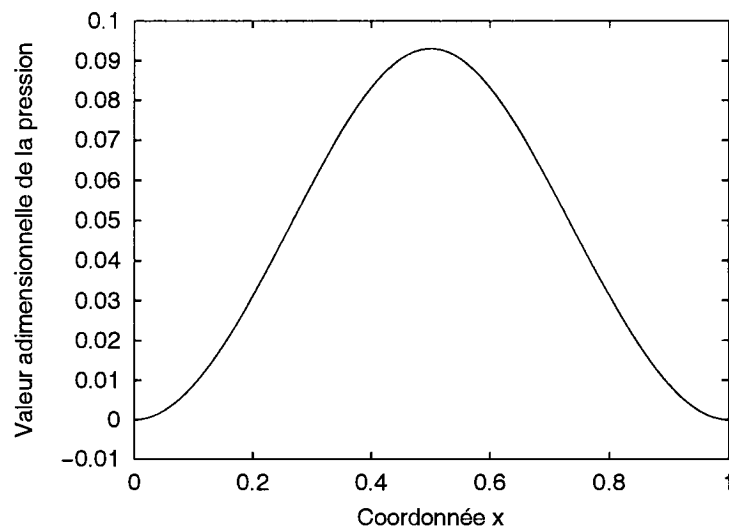


Distribution de la pression.

FIG. 5.5 Distributions de viscosité et de pression à l'interface.



Distribution de la viscosité.



Distribution de la pression.

FIG. 5.6 Distributions de viscosité et de pression à l'interface avec un mauvais choix de champ de déplacements.

champ de déplacements et la distribution de viscosité et de pression. La prochaine étape consiste à calculer les termes sources des systèmes d'équations fluides et solides.

Les termes sources que l'on doit inclure dans les équations du mouvement pour le fluide sont les suivants :

$$f_x^f = \rho_f \left(u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_f}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial r^2} \right) - 2 \frac{\partial \mu_f}{\partial x} \frac{\partial u_f}{\partial x} - \frac{\partial \mu_f}{\partial r} \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \quad (5.30)$$

$$f_r^f = \rho_f \left(u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_f}{\partial r} - \mu_f \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial r^2} + \frac{v_f}{r^2} \right) - \frac{\partial \mu_f}{\partial x} \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial \mu_f}{\partial r} \frac{\partial v_f}{\partial r} \quad (5.31)$$

Quant aux termes sources pour le solide, on les écrit de la manière suivante :

$$f_x^s = - \left(\frac{\partial \sigma_{l_{xx}}}{\partial x} + \frac{\sigma_{l_{xr}}}{r} + \frac{\partial \sigma_{l_{xr}}}{\partial r} \right) \quad (5.32)$$

$$f_r^s = - \left(\frac{\partial \sigma_{l_{rx}}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{l_{rr}}}{\partial r} + \frac{\sigma_{l_{rr}} - \sigma_{l_{\theta\theta}}}{r} \right) \quad (5.33)$$

Le lecteur trouvera en annexe II le détail de tous les termes sources.

Il suffit maintenant d'appliquer les conditions frontières et de résoudre le cas test. La figure 5.7 illustre la configuration non déformée à laquelle on applique les conditions frontières. Les frontières en ligne pleine correspondent à des conditions de Dirichlet tandis que celle en tireté correspond à une condition de Neumann. Puisque le champ de vitesse est connu, il est possible de calculer les contraintes exactes à

appliquer sur cette frontière particulière. Pour les autres frontières, elles prennent la valeur zéro ou *usager*, c'est-à-dire évaluées à partir des expressions de la solution exacte. Finalement, la condition *cont* qui est appliquée à l'interface fluide-solide signifie la continuité des déplacements et des forces fluides et solides.

La figure 5.8 présente le maillage initial et un maillage intermédiaire de la solution éléments finis dans la configuration déformée. On présente également les vecteurs vitesse et une illustration du champ de déplacements dans la configuration déformée à la figure 5.9.

5.1.2 Analyse de la convergence

L'analyse de convergence a pour objectif de vérifier la précision de la solution éléments finis, le bon comportement de l'adaptation de maillage et la précision de l'estimateur d'erreur.

On présente dans le tableau 5.1 l'évolution de l'erreur exacte et de l'erreur estimée avec le raffinement du maillage. On y compare, évaluées en normes énergie, l'erreur estimée, $\|\mathbf{W}\|_{est}$, avec l'erreur exacte, $\|\mathbf{W}\|_{exa}$, du les champs de vitesse et de déplacements. De plus, on y compare, évaluées en norme L^2 , l'erreur estimée, $\|p_f\|_{est}$, avec l'erreur exacte, $\|p_f\|_{exa}$, du champ de pression. On présente également l'évolution de ces erreurs sous la forme d'un graphique, voir figure 5.10.

On remarque que l'estimation d'erreur, tant pour la vitesse et les déplacements que pour la pression, convergent vers les erreurs exactes avec le raffinement du maillage. Ceci indique que l'estimateur d'erreur est fiable.

La pente des droites correspond à l'ordre de convergence réel pour chaque variable puisque la figure 5.10 est tracée en variables logarithmiques. On sait que l'erreur

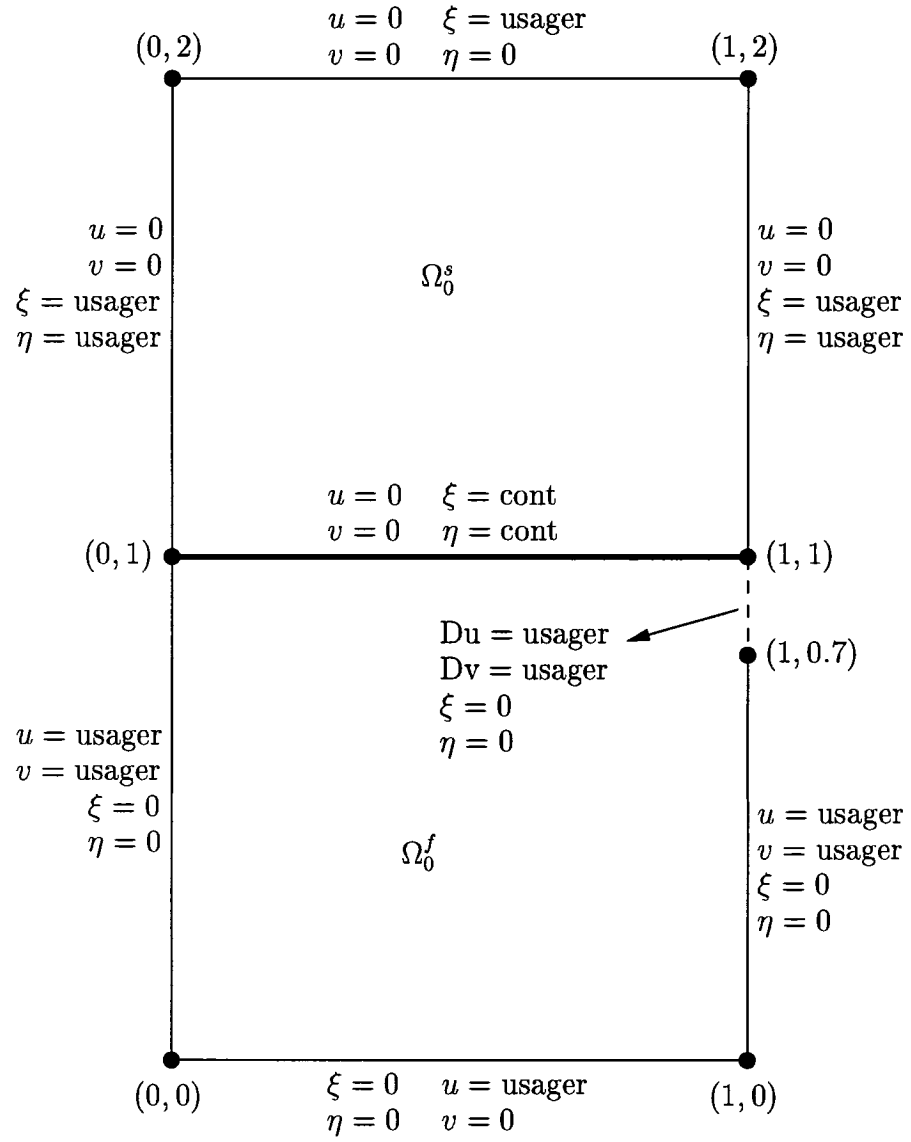


FIG. 5.7 Configuration initiale et conditions frontières.

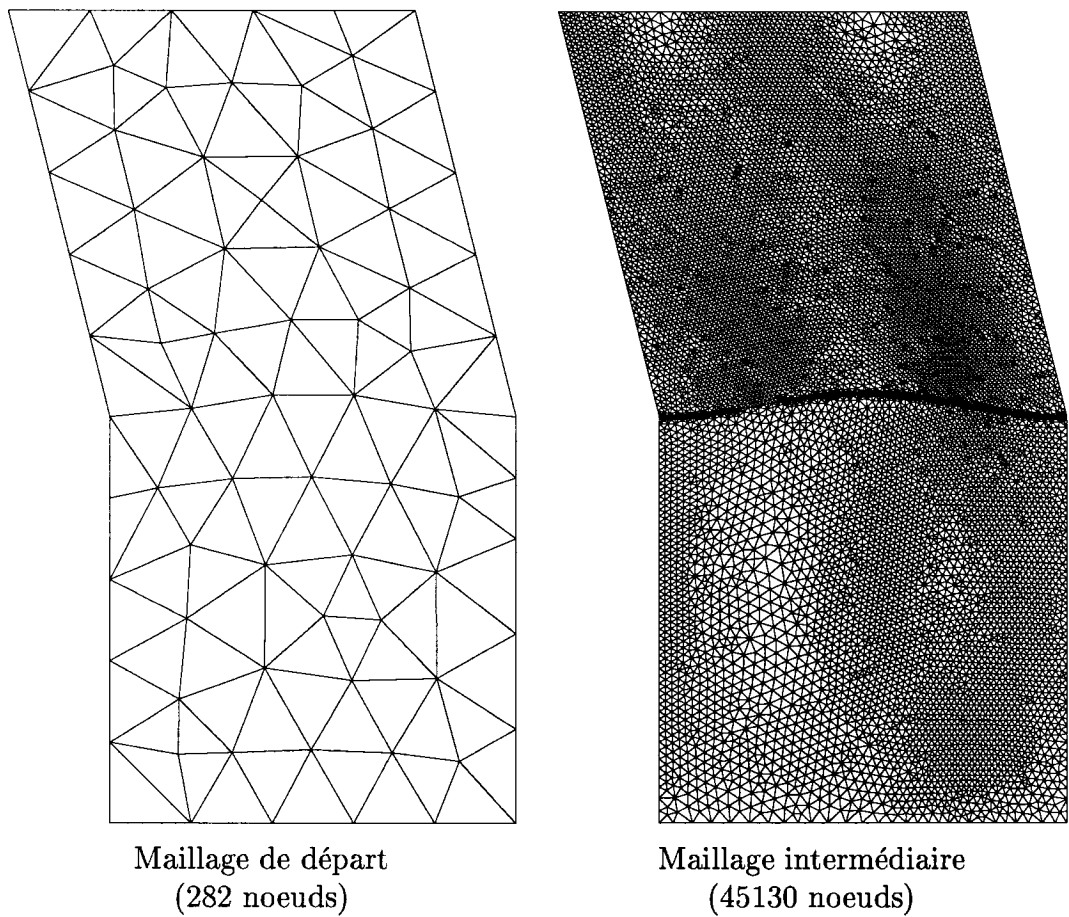


FIG. 5.8 Maillages de la solution éléments finis.

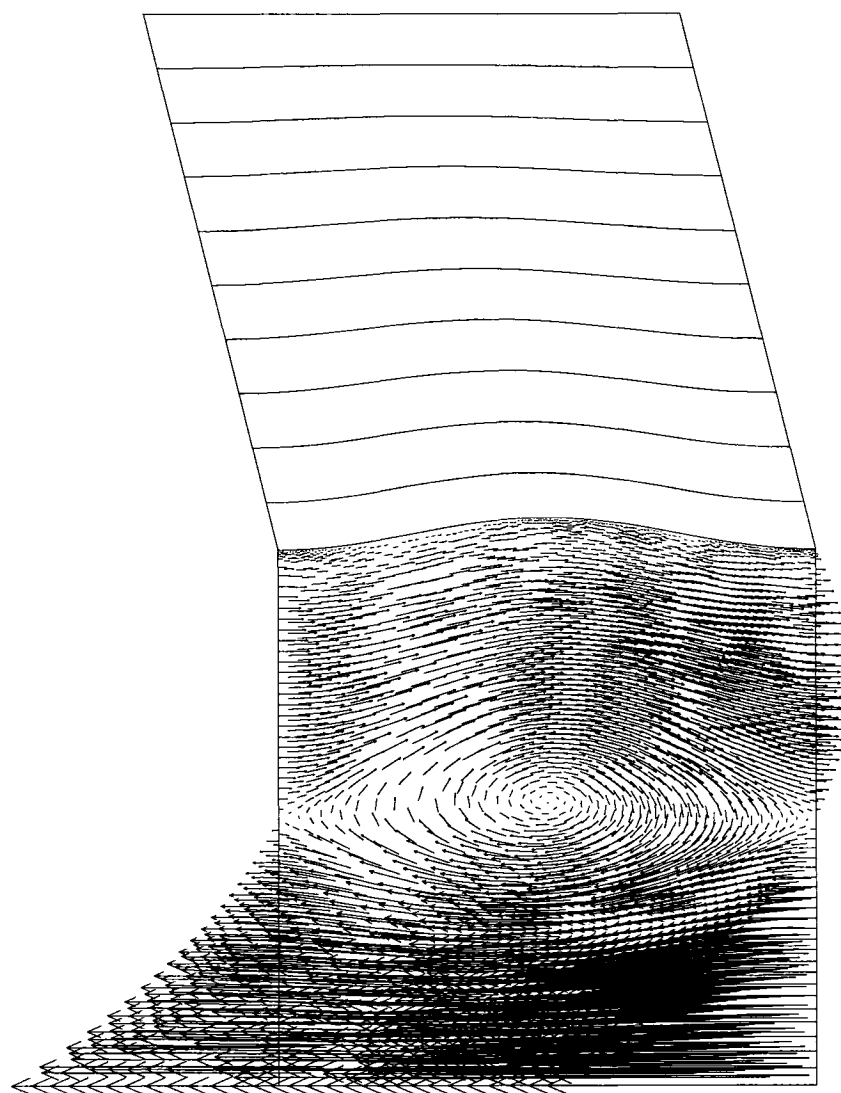


FIG. 5.9 Vecteurs vitesse (partie du bas) et illustration du déplacement (partie du haut).

Taille moy.	$\ \mathbf{W}\ _{est}$	$\ \mathbf{W}\ _{exa}$	$\ p_f\ _{est}$	$\ p_f\ _{exa}$
0.997E-01	9.935E-03	1.124E-02	3.860E-03	1.222E-02
0.887E-01	2.366E-03	2.710E-03	5.921E-04	2.240E-03
0.664E-01	1.351E-03	1.331E-03	2.798E-04	4.688E-04
0.490E-01	6.994E-04	6.728E-04	1.750E-04	2.201E-04
0.362E-01	4.053E-04	3.836E-04	9.739E-05	1.095E-04
0.271E-01	2.209E-04	2.123E-04	6.180E-05	6.634E-05
0.200E-01	1.206E-04	1.180E-04	3.353E-05	3.619E-05
0.149E-01	6.555E-05	6.459E-05	1.825E-05	1.906E-05
0.110E-01	3.621E-05	3.563E-05	1.021E-05	1.050E-05
0.803E-02	1.946E-05	1.926E-05	5.540E-06	5.668E-06

TAB. 5.1 Tableau de l'évolution de l'erreur estimée et de l'erreur exacte avec le maillage.

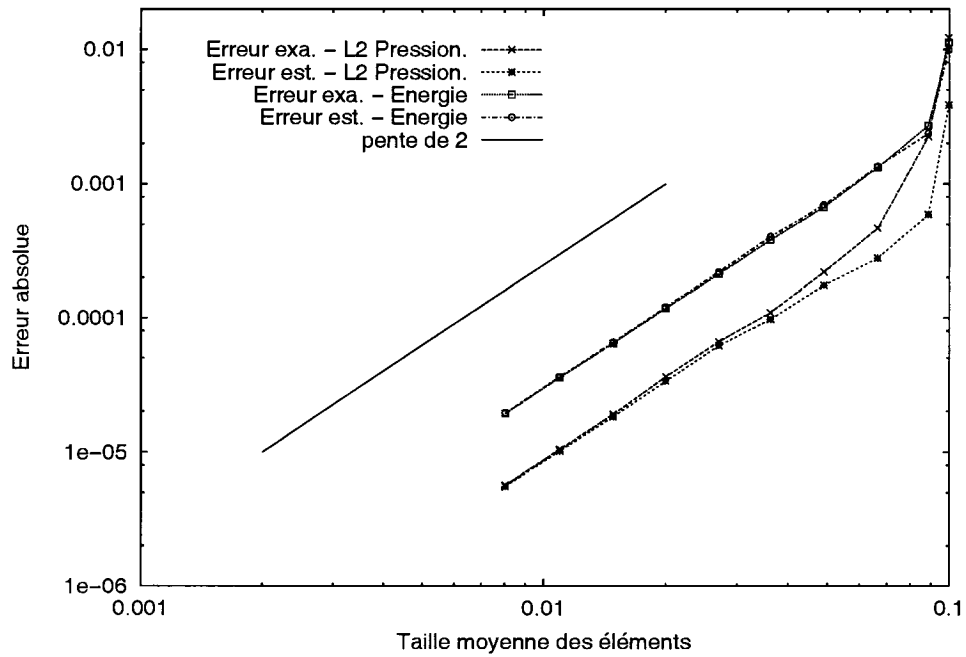


FIG. 5.10 Évolution de l'erreur estimée et exacte avec le maillage.

est proportionnelle à la taille des éléments selon la relation suivante :

$$\|e\| = ch_e^\alpha \quad (5.34)$$

où c est une constante, h_e est la taille de l'élément et α est fonction de l'ordre de la norme de l'erreur utilisé. Dans le cas de la vitesse et des déplacements, on utilise la norme énergie de l'erreur qui apparenté à la semi-norme sur H^1 , voir équation 3.41 et 3.43. Cette norme utilise l'erreur sur les premières dérivées de la vitesse et des déplacements et est de $O(h_e^2)$ car l'élément est quadratique en vitesse et en déplacement. Ceci se traduit par une pente théorique de 2 comme le montre la figure 5.10. Sur les deux derniers cycles, on obtient une pente 1.98 pour la norme énergie de l'erreur exacte et une pente de 2.00 pour la norme énergie de l'erreur estimée. Dans le cas de la pression, on utilise la norme L^2 qui est de $O(h_e^2)$. Comme l'élément utilisé est linéaire en pression, la norme L^2 de l'erreur en pression est également de $O(h_e^2)$, ce qui se traduit par une pente théorique de 2. On obtient une pente de 1.98 pour la norme L^2 de l'erreur exacte et une pente de 1.97 pour la norme L^2 de l'erreur estimée.

5.2 Conclusion

On peut donc conclure que le code de calcul permet d'obtenir une solution éléments finis juste et précise du cas test utilisé. Il montre également une convergence quadratique conformément aux normes utilisées. De plus, les estimateurs sont asymptotiquement exacts : l'erreur estimée converge vers l'erreur exacte avec le raffinement de maillage. Maintenant que le code de calcul est vérifié, on peut aborder en toute confiance les cas d'application.

CHAPITRE 6

APPLICATIONS

Dans ce chapitre, on présente trois cas d'application en axisymétrie. Le premier est un écoulement sanguin dans une artère flexible dont la paroi artérielle présente une faiblesse locale de rigidité. Pour rendre la simulation plus réaliste, on présente dans le 2^e cas la même artère entourée d'un solide mou jouant le rôle des tissus avoisinants. Le dernier cas est un modèle simplifié d'un oeil atteint de glaucome. Il sera question de prédire la réponse de la structure de l'oeil à une pression intraoculaire normale et anormale.

6.1 Artère affaiblie : avec et sans tissus avoisinants

Ces deux cas sont ceux d'un écoulement sanguin dans une artère flexible dont la paroi artérielle présente une faiblesse localisée. On rencontre ce type d'écoulement dans le cas d'une aorte ascendante qui se gonfle suite à un changement physiologique de sa structure interne. On retrouve également ce type d'écoulement au stade initial de la formation d'un anévrisme. Dans les deux cas, la diminution de la rigidité et de l'étirement des tissus ont un impact direct sur la dynamique de l'écoulement dans tout le système artériel.

Les deux configurations sont génériques et les simulations constituent une démonstration de notre méthodologie numérique. Notons aussi que la plupart des études s'intéressent au cas d'une artère isolée et ne tiennent pas compte des tissus avoisinants. Nous avons rendu la simulation la plus réaliste possible en utilisant des

données physiologiques et géométriques représentatives de la situation. On fait l'hypothèse simplificatrice de symétrie de révolution. On ne peut donc malheureusement pas tirer de conclusions sur les impacts réels de cette simplification sur la paroi artérielle et/ou l'écoulement sanguin. Par contre, on peut établir des tendances globales en considérant le cas d'une artère isolée ou entourée de tissus.

6.1.1 Description du cas de l'artère isolée

Nous avons choisi l'artère abdominale telle qu'indiquée par le numéro 35 à la figure 6.1. Les propriétés et dimensions de la paroi artérielle, tirées des travaux de Sud et al. [39] et de Bergel [3], sont données au tableau 6.1 et illustrées à la figure 6.2.

	Paramètres	dimensionnels	adimensionnels
Propriétés géométriques	r_i	0.57 cm	0.5
	e	0.08 cm	0.0702
	$x1$	-2.65 cm	-2.325
	$x2$	-0.912 cm	-0.8
	$x3$	-0.57 cm	-0.5
	$x4$	0.57 cm	0.5
	$x5$	0.912 cm	0.8
Propriétés mécaniques	$x6$	2.65 cm	2.325
	E_{nom}	890000 Pa	334461
	E_{min}	150242 Pa	56461
	ν	0	0

TAB. 6.1 Propriétés géométriques et mécaniques de l'artère.

Les paramètres r_i et e correspondent respectivement au rayon intérieur de l'artère (lumen) et à l'épaisseur de la paroi artérielle. Nous avons modélisé la faiblesse par une diminution locale du module de Young dans la paroi artérielle. Le paramètre E_{nom} est le module de Young d'une paroi artérielle saine. La valeur du paramètre E_{min} a été choisi de façon arbitraire pour obtenir de grands déplacements. Nous

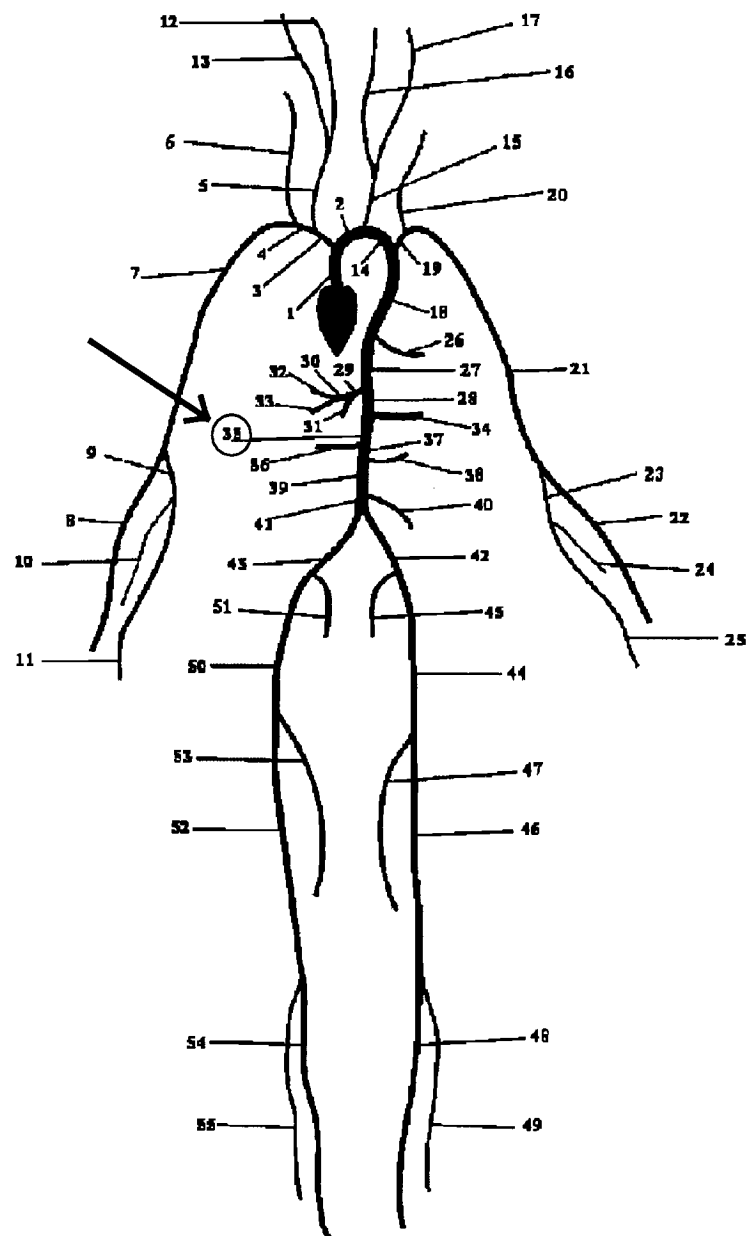


FIG. 6.1 Schéma du système artériel [35].

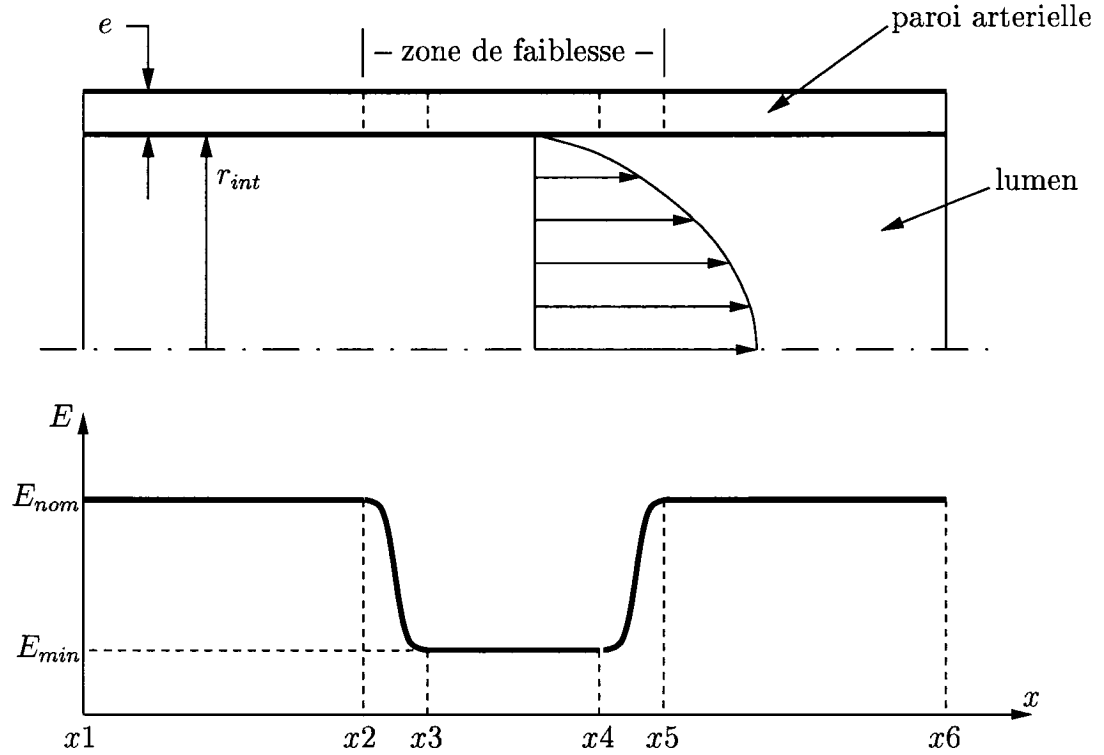


FIG. 6.2 Géométrie et distribution de la rigidité dans la paroi artérielle.

faisons l'hypothèse que la paroi artérielle est isotrope et que son module de Young est indépendant de la déformation. Entre les stations x_1 et x_2 et les stations x_5 et x_6 , on impose un module de Young constant de valeur nominale, E_{nom} . Dans la zone de faiblesse, de x_3 à x_4 , on utilise un module de Young de valeur inférieure, E_{min} . La transition entre les deux niveaux s'effectue par une fonction sinusoïdale afin d'éviter toute discontinuité des dérivées de la distribution du module de Young. En première approximation on utilise un matériau compressible dont le coefficient de Poisson est $\nu = 0$.

Passons maintenant au comportement du sang. En première approximation, on considère un écoulement stationnaire et incompressible. Les conditions de débit et de pression hydrostatique dans l'artère ainsi que les propriétés du sang sont données

au tableau 6.2. Le débit Q et la pression hydrostatique P_s sont tirés des travaux de Sud et al. ^[39]. La viscosité apparente du sang μ_α et sa masse volumique ρ sont tirés de l'ouvrage de Fung ^[18].

	Paramètres	dimensionnels	adimensionnels
Conditions de l'écoulement	Q	$5.122 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{s}^{-1}$	
	u_m	0.0502 ms^{-1}	1
	P_s	100 mm Hg	5010.2
Propriétés du sang	ρ	1056 Kg m^{-3}	1
	μ_α	0.0035 Pas	0.00579

TAB. 6.2 Caractéristiques de l'écoulement du sang.

Pour la simulation, on utilise les valeurs adimensionnelles présentées aux tableaux 6.1 et 6.2. Les valeurs de références utilisées pour adimensionnaliser les paramètres sont :

$$L_{ref} = 2r_i = 1.14 \text{ cm} \quad (6.1)$$

$$u_{ref} = u_m = 0.0502 \text{ ms}^{-1} \quad (6.2)$$

$$P_{ref} = \rho u_m^2 = 2.661 \text{ Pa} \quad (6.3)$$

$$\rho_{ref} = \rho = 1056 \text{ Kg m}^{-3} \quad (6.4)$$

$$E_{ref} = \rho u_m^2 = 2.661 \text{ Pa} \quad (6.5)$$

$$\nu_{ref} = 0 \quad (6.6)$$

$$(6.7)$$

La façon de faire habituelle pour adimensionnaliser la pression hydrostatique est d'utiliser la pression dynamique. Pour être consistant, on utilise également cette pression de référence pour adimensionnaliser le module de Young de la paroi. En effet, comme les déplacements de la paroi dépendent du module de Young et sont

engendrés essentiellement par la pression hydrostatique, il est donc naturel d'adimensionnaliser E_{nom} et E_{min} de la même façon que la pression hydrostatique. La viscosité adimensionnelle est fonction du nombre de Reynolds qui, dans le cas présent, vaut 172.7. On a la relation suivante :

$$\frac{\rho u_m 2r_i}{\mu_\alpha} = Re = \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}_m 2\tilde{r}_i}{\tilde{\mu}_\alpha} \quad (6.8)$$

où les variables qui portent le \sim sont adimensionnelles. On en déduit finalement :

$$\tilde{\mu}_\alpha = \frac{\tilde{\rho} \tilde{u}_m 2\tilde{r}_i}{Re} = \frac{1}{Re} = 0.00579 \quad (6.9)$$

Maintenant que nous avons les valeurs adimensionnelles, il reste à appliquer les conditions frontières sur les deux sous-domaines de calcul tels qu'illustrés à la figure 6.3.

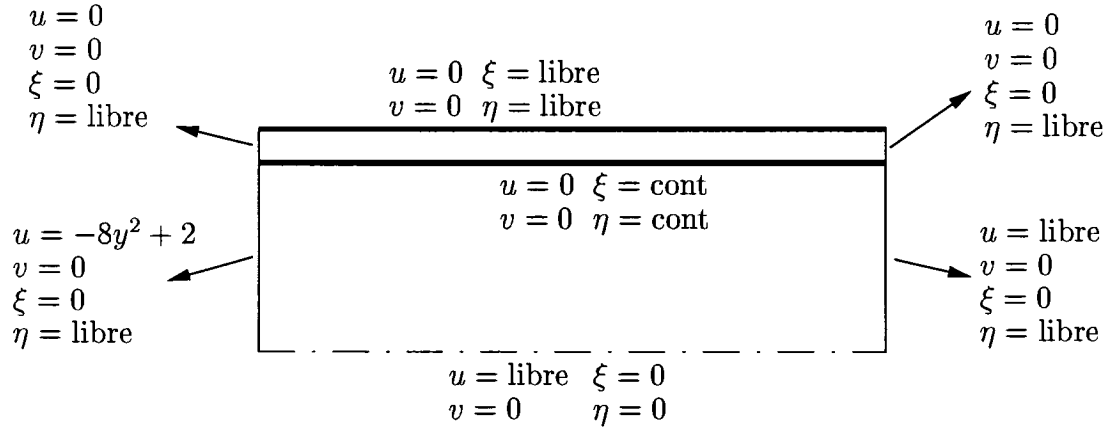


FIG. 6.3 Conditions frontières.

Nous avons bloqué les déplacements en ξ aux extrémités gauche et droite de la paroi comme s'il s'agissait d'une condition symétrie. L'interface fluide-solide et la paroi extérieure sont totalement libre de se déplacer dans les directions x et r .

Le symbole *cont* signifie la continuité des déplacements et des forces alors que *libre* signifie qu'on applique des forces nulles. On libère également les déplacements verticaux, en η , aux deux extrémités. Il n'est pas nécessaire d'imposer $\eta = 0$ pour éliminer le mouvement de corps rigide. En effet la symétrie de révolution les élimine d'emblée. Partout dans le solide, les vitesses u et v sont nulles. Pour le fluide, on fait l'hypothèse que l'écoulement est complètement développé à l'entrée de l'artère. On impose donc deux conditions de Dirichlet, soit un profil de vitesse parabolique sur u (la vitesse moyenne est de 1) et une vitesse nulle en v . Sur l'axe de symétrie, on impose une vitesse v et une force axiale de cisaillement nulle ($v = 0$ et $u = \text{libre}$). On applique une condition de non glissement sur la paroi artérielle qui se traduit par deux conditions de Dirichlet nulles pour u et v . Pour la sortie, on fait l'hypothèse que la vitesse v est nulle en imposant une condition de Dirichlet homogène et on applique une force axiale nulle. En fait, il aurait fallu appliquer une force axiale non nulle pour fixer le niveau la pression hydrostatique dans le domaine fluide. Dans notre cas, on procédera d'une manière différente pour des raisons numériques qu'on explique à la section 6.1.2. Quant au champ de déplacements du pseudo-solide dans la zone fluide, on permet le mouvement dans la direction r , $\eta = \text{libre}$, sauf sur l'axe de symétrie, $\eta = 0$, de manière à ce que le pseudo-solide puisse suivre le mouvement de la paroi artérielle.

6.1.2 Méthode des réactions modifiées

On peut fixer le niveau de pression dans un écoulement en imposant une force normale en sortie. Dans notre cas, il nous faut imposer une pression hydrostatique adimensionnelle dans le fluide de 5010.2. Cette valeur de pression nous vient de l'adimensionnalisation de la pression réelle par la pression dynamique. Il nous suffit donc d'appliquer à la sortie une condition de Neumann axiale d'une valeur de 5010.2.

Comme le vitesse est d'ordre 1 et que la pression est d'ordre 5010, il y a presque quatre ordres de grandeur de différence entre les niveaux de pression et de vitesses. Si on compare l'ordre de grandeur des contraintes visqueuse à celui de la pression, on constate une différence de 5 ordres de grandeur. C'est donc essentiellement la pression hydrostatique qui déforme la paroi artérielle. Cette pression constante ne joue aucun rôle dans les équations fluides puisque son gradient est nul. Par contre, son rôle est central dans le calcul des chargements que le fluide applique à l'interface fluide-solide. Sa présence est donc essentielle dans les équations solides.

Nous avons rencontré beaucoup de problèmes de convergence en imposant le niveau de pression via une force normale à la sortie. Puisqu'on observe une différence de quatre ordres de grandeur entre la solution vitesse et la pression, la norme de la solution globale est donc d'ordre 10^4 tandis que celle de la vitesse est seulement de l'ordre de 1. Cet écart provoque une instabilité dans la résolution du système matriciel probablement causée par un mauvais conditionnement de la matrice globale. Malheureusement, il nous a été impossible de cerner la cause exacte de cette instabilité. Nous avons néanmoins pu contourner ce problème en appliquant directement la pression hydrostatique à la structure par le biais de l'interface fluide-solide au lieu de l'appliquer à la sortie du domaine. Ainsi, on applique une force normale nulle à la sortie du fluide et on ajoute la pression hydrostatique directement aux réactions calculées à l'interface. De cette façon, on retire la pression hydrostatique des équations du mouvement et on applique à l'interface les forces induites par l'écoulement plus la pression hydrostatique désirée. On évite ainsi les problèmes d'ordres de grandeur dans le fluide et donc les instabilités.

L'implémentation de cette variante de la méthode des réactions est très simple : il suffit d'ajouter la pression hydrostatique aux réactions fluides déjà calculées aux noeuds de l'interface sur le côté fluide. La pression hydrostatique est donc maintenant retirée du problème fluide. Les réactions fluides calculées à l'interface sont

essentiellement visqueuses. La contribution de la pression hydrostatique désirée est ajoutée aux réactions fluides à la ligne 4 de la figure 3.3. Il faut être attentif à ne pas appliquer la pression hydrostatique en sortie en plus d'ajouter sa contribution aux réactions. Ceci aurait pour conséquence de doubler la pression appliquée à l'interface, de produire une solution au mauvais problème et de réintroduire les instabilités que l'on cherche à éliminer.

6.1.3 Description du cas de l'artère avec tissus avoisinants

Il s'agit d'une extension du cas de l'artère isolée. On y ajoute une structure à l'extérieure de l'artère pour modéliser les effets des tissus avoisinants (muscle ou autres organes). Dans le cas présent, on a choisi des tissus musculaires.

Il s'agit de la même artère que précédemment. La distribution du module de Young à travers la paroi artérielle demeure également la même. La figure 6.4 illustre l'artère et le muscle qui l'entoure. Le tableau 6.3 résume les propriétés géométriques et mécaniques des tissus musculaires.

	Paramètres	dimensionnels	adimensionnels
Propriétés géométrique	e_{msc}	2.77 cm	2.4298
Propriétés mécaniques	E_{msc} ν_{msc}	53220 Pa 0	20000 0

TAB. 6.3 Propriétés des tissus avoisinants de l'artère.

Le paramètre E_{msc} est le module de Young des tissus musculaires au repos tiré de l'ouvrage de Fung ^[18]. Tout comme la paroi artérielle, on considère les tissus musculaires comme isotropes et le module de Young constant. Ce dernier est adimensionnalisé par rapport à la pression dynamique tel que définie dans la section 6.1.1.

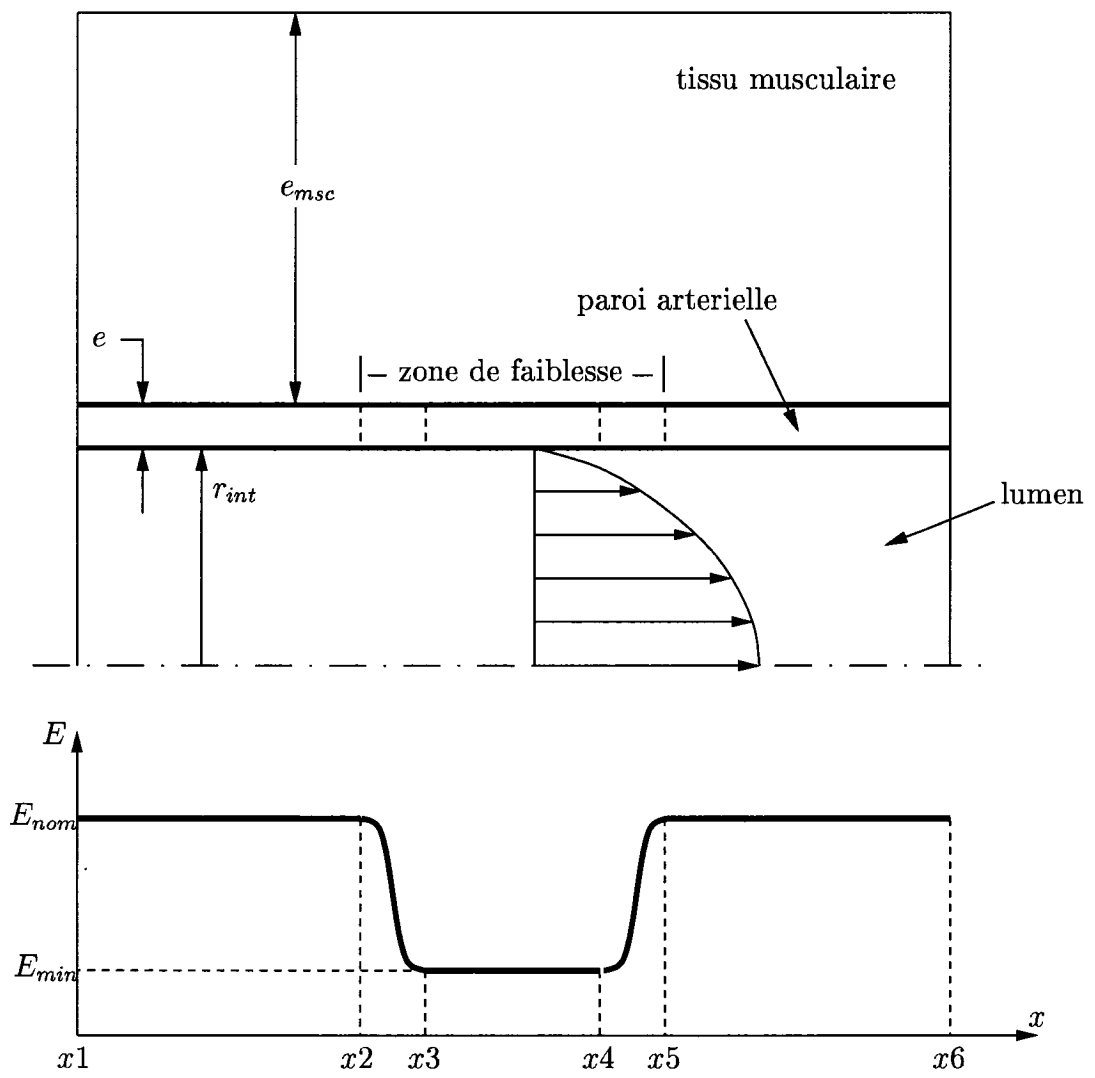


FIG. 6.4 Géométrie et distribution de la rigidité dans la paroi artérielle.

La dimension e_{msc} a été choisie de façon arbitraire et elle est adimensionnalisée par rapport à l'épaisseur de la paroi artérielle. On utilise un matériau compressible dont le coefficient de Poisson, ν_{msc} , vaut zéro. Le lecteur peut se référer au tableau 6.1 pour connaître la valeur des autres paramètres de la figure 6.4.

Le fluide utilisé dans cette simulation est exactement le même que celui utilisé à la section 6.1.1.

En ce qui concerne les conditions frontières, on ajoute à celles de l'artère isolée, figure 6.3, ces conditions limites aux tissus musculaires. La figure 6.5 résume l'ensemble des conditions frontières appliquées aux trois sous-domaines, le fluide et le solide.

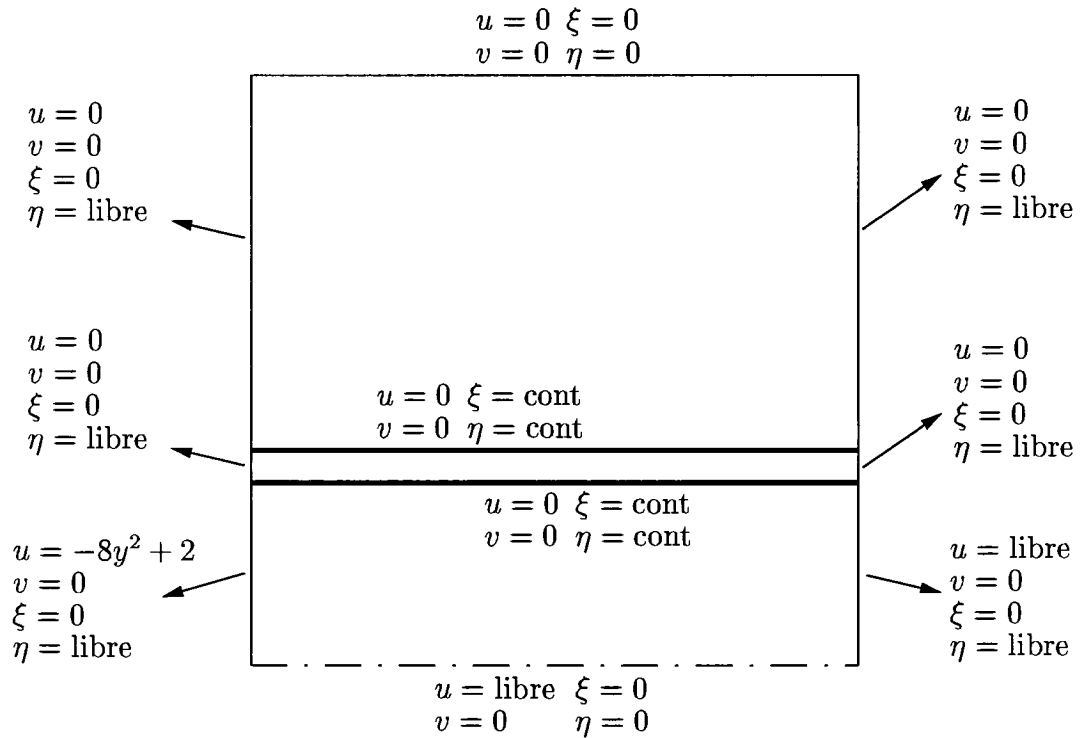


FIG. 6.5 Conditions frontières.

Aux extrémités du muscle, on utilise les mêmes conditions limites que pour l'artère.

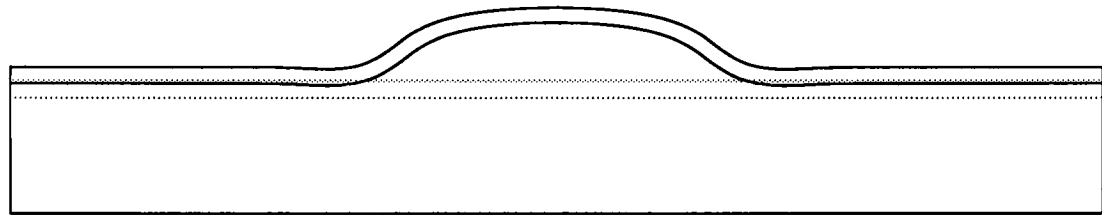
On applique un déplacement nul en ξ , tandis qu'on libère les déplacements en η pour permettre aux tissus de s'ajuster aux déplacements de la paroi artérielle. À la frontière extérieure, on impose des déplacements nuls en ξ et η pour simuler le comportement de la surface extérieure du muscle car ce dernier amortit les déplacements subis par l'artère. La condition frontière entre les deux sous-domaines solides correspond à condition de continuité des déplacements et d'équilibre des forces.

6.1.4 Résultats : artère isolée vs artère avec tissus musculaires

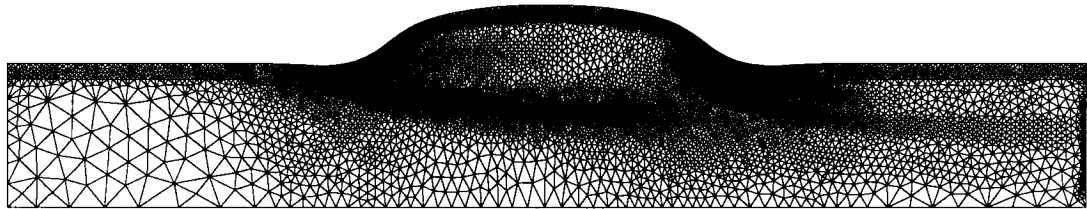
La figure 6.6 illustre la géométrie non déformée de l'artère en lignes tiretées et sa déformée en lignes pleines. On y présente également le maillage de l'avant dernier cycle adaptatif dans la configuration déformée. Nous avons fait au total 12 cycles adaptatifs pour en arriver à un maillage final de 76284 noeuds.

À titre de comparaison, on présente à la figure 6.7 la géométrie non déformée de l'artère avec tissus musculaires en lignes tiretées et sa déformée en lignes pleines. On y présente aussi le maillage du dernier cycle adaptatif, le 7^e, dans la configuration déformée.

Les deux maillages présentent essentiellement les mêmes caractéristiques. Du premier coup d'oeil, on peut situer très facilement les couches cisailées dans l'écoulement. Dans les deux cas, ces couches prennent naissance en amont et en aval de la faiblesse. On remarque également beaucoup de raffinement à la sortie du domaine fluide. Ce raffinement est probablement causé par la condition de Dirichlet nulle en sortie sur la vitesse v appliquée à la sortie. Il aurait peut-être été mieux d'appliquer une condition de force radiale nulle pour éviter ce type de raffinement. Dans tous les cas, la perturbation engendrée dans l'écoulement par la condition de sortie n'a aucune influence sur l'écoulement amont car elle est confinée en sortie par le



Géométries non déformée et déformée.



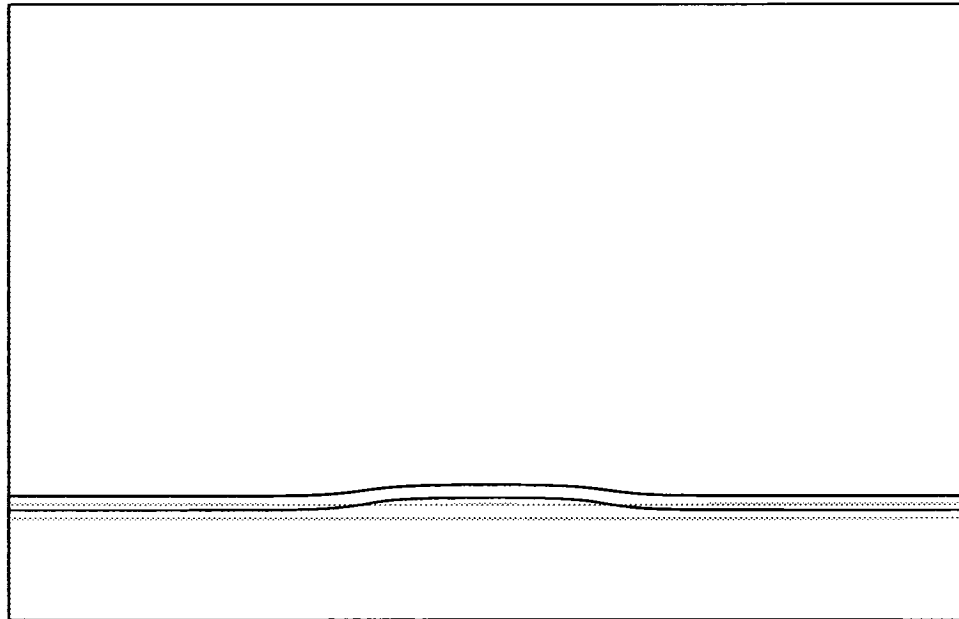
Maillage de 49598 noeuds.

FIG. 6.6 Maillage et géométrie de l'artère isolée.

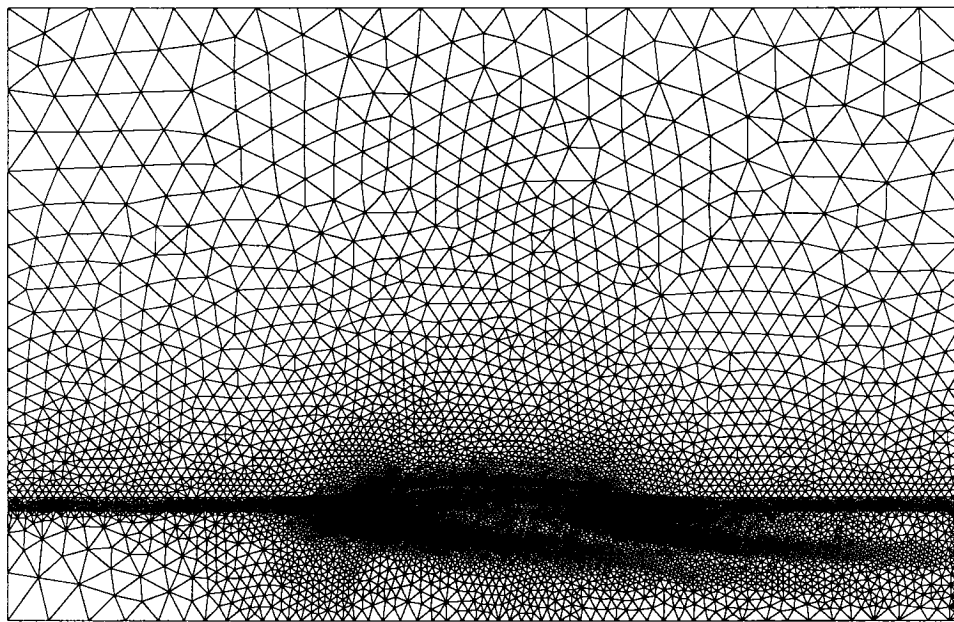
raffinement du maillage.

À la figure 6.8, on compare les déplacements des surfaces extérieures et intérieures (interface fluide-solide) pour les deux configurations de l'artère. En complément, on présente également l'évolution de l'épaisseur de la paroi artérielle dans le cas de l'artère isolée et de celle avec tissus, voir figure 6.9. On ajoute sur cette figure l'épaisseur de l'artère au repos, c'est-à-dire avant chargement.

On y remarque immédiatement la réduction d'amplitude du déplacement global de la paroi artérielle causée par les tissus musculaires, voir figure 6.8. De plus, on observe l'aplatissement de la zone de déplacement maximal causée par les tissus musculaires. En amont et en aval de la faiblesse, la paroi artérielle dans le cas de l'artère isolée subit un léger déplacement vers la bas. Cette variation locale du déplacement est causée par la composante horizontale de la pression qui pousse sur la partie inclinée de la paroi. Cette composante pousse vers la gauche en amont de la faiblesse et vers la droite en aval de celle-ci. Sous cette contrainte de compression,



Géométries non déformée et déformée.



Maillage de 39556 noeuds.

FIG. 6.7 Maillage et géométrie de l'artère avec tissus musculaires.

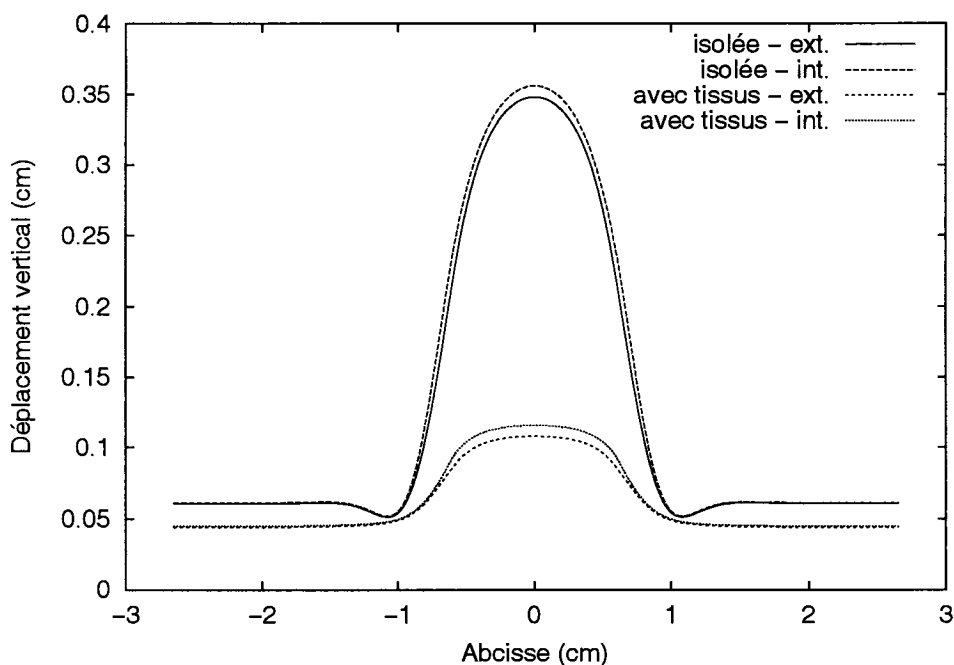


FIG. 6.8 Comparaison des déplacements : artère isolée vs avec tissus musculaires

la paroi se comporte de façon similaire à une poutre en compression qui subit un flambement. On remarque que la surface interne subit un plus grand déplacement que celle de la surface externe. On en déduit que l'artère isolée et avec tissus diminuent d'épaisseur en se déformant, voir figure 6.9. Bien que le déplacement soit beaucoup plus important dans le cas de l'artère isolée, le changement d'épaisseur au centre (en $x = 0$) et aux extrémités est du même ordre de grandeur pour les deux cas. Ce comportement provient du caractère compressible du matériau qui permet d'augmenter son volume au cours de sa déformation et ainsi conserver l'épaisseur de la paroi. Toutefois, si on avait utilisé un matériau incompressible, la paroi artérielle aurait été beaucoup plus mince dans le cas de l'artère isolée. Lorsqu'on s'éloigne du centre de la faiblesse, la distribution d'épaisseur diffère d'un cas à l'autre. On remarque une augmentation plus rapide de l'épaisseur dans le cas de l'artère isolée. De plus, la valeur de l'épaisseur subit un brusque amincissement

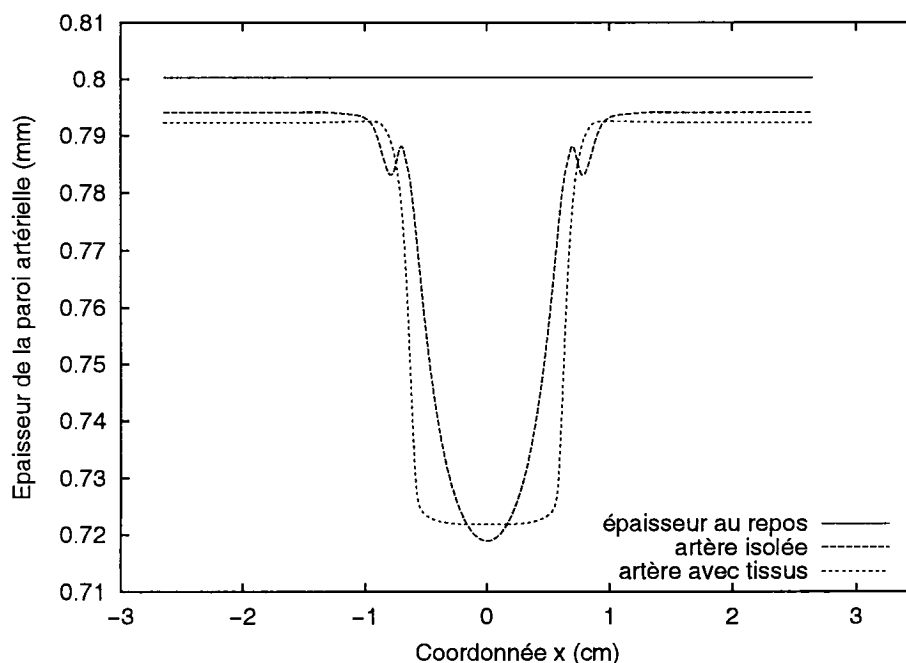


FIG. 6.9 Comparaison des épaisseurs : artère isolée vs avec tissus musculaires

pour ensuite augmenter à nouveau. Cette oscillation est fort probablement causée par les fortes contraintes de tension-compression que subit l'artère isolée à cet endroit. On observe également l'effet d'amortissement des tissus avoisinants sur l'épaisseur de l'artère. Leur présence uniformise l'épaisseur de la paroi dans la zone de faiblesse. L'épaisseur de la paroi artérielle n'est que très peu influencée par la présence des tissus avoisinants. Bien que nous observons des différences locales entre les distributions d'épaisseur, il demeure évident que le changement d'épaisseur est du même ordre de grandeur. Somme toute, les tissus avoisinants ont une grande influence sur la géométrie déformée de l'artère mais très peu sur l'épaisseur de celle-ci dans le cas d'un matériau compressible.

La figure 6.10 illustre l'écoulement dans les deux cas. On y voit très bien la zone de recirculation causée par le déplacement de la paroi artérielle dans le cas de

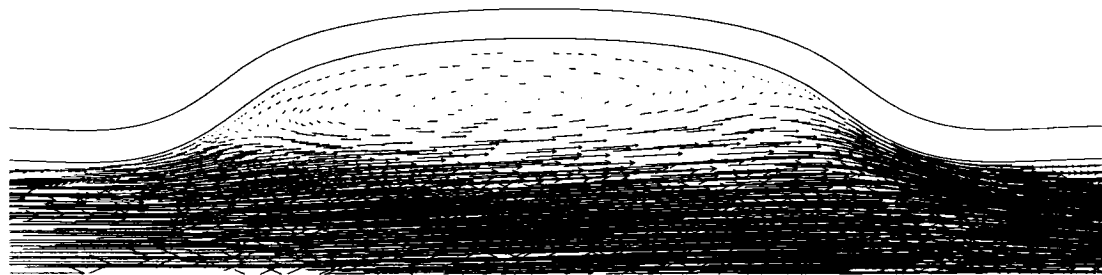
l'artère isolée. On constate cependant l'absence totale de cette recirculation dans le cas de l'artère avec tissus musculaires. Taylor et al. ^[40] mentionnent dans leur travaux que la présence de zones de recirculation est un facteur de risque important dans le développement de maladies comme l'athérosclérose. Cliniquement parlant, le dépôt de plaques est très fréquent dans les artères abdominales, coronariennes et dans la carotide où l'on rencontre des écoulements complexes. Ces écoulements se manifestent au voisinage d'un embranchement, d'une bifurcation, d'un anévrisme ou d'un gonflement. Il semble donc critique d'inclure les tissus avoisinants dans le modèle de l'artère car ils ont un effet important sur l'écoulement, surtout lorsque l'on s'attarde à l'étude des mécanismes déclencheurs de pathologies.

Malgré l'asymétrie de l'écoulement, on remarque que le déplacement de la paroi artérielle semble symétrique dans les deux cas simulés. En réalité, les déplacements sont asymétriques à cause des forces visqueuses. Mais comme ces dernières sont 5 ordres de grandeur inférieures à la pression hydrostatique, l'asymétrie est si petite qu'elle n'est pas visible sur l'image.

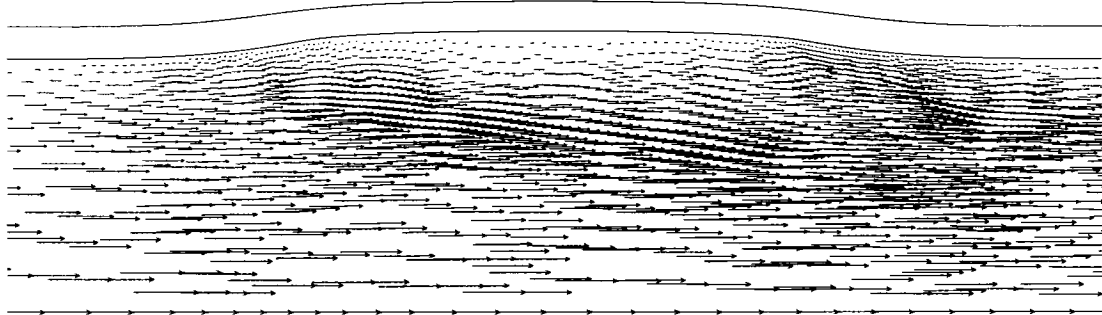
Passons maintenant à l'analyse des contraintes dans la paroi artérielle pour les deux cas. Puisque les contraintes sont représentées par un tenseur, il est difficile visualiser les résultats obtenus. Pour mesurer l'état des contraintes en un point, nous avons choisi de prendre les valeurs des contraintes principales. Ces dernières expriment essentiellement les contraintes de tension (σ_1) et de compression (σ_2) que subit un élément de structure infinitésimal orienté selon les axes principaux. On les obtient à l'aide des équations suivantes :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{rr}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{rr}}{2}\right)^2 + (\sigma_{xr})^2} \quad (6.10)$$

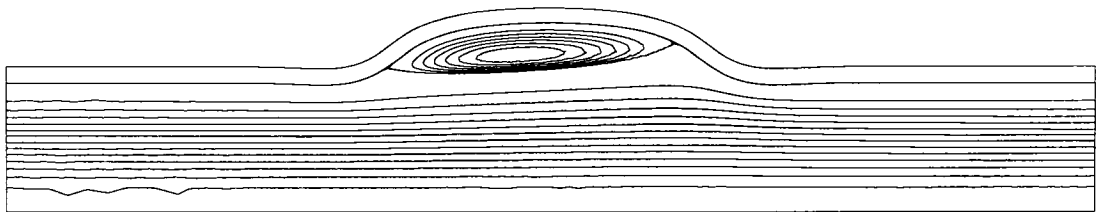
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{rr}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{rr}}{2}\right)^2 + (\sigma_{xr})^2} \quad (6.11)$$



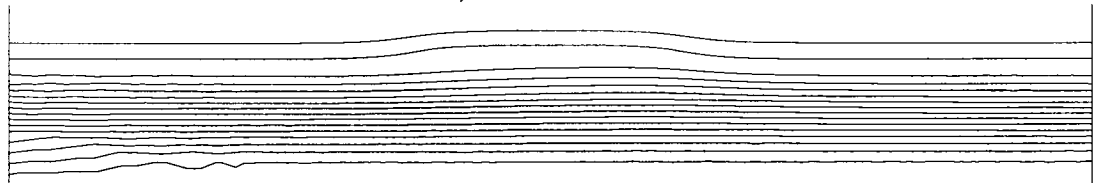
a) Artère isolée



b) Artère avec tissus musculaires



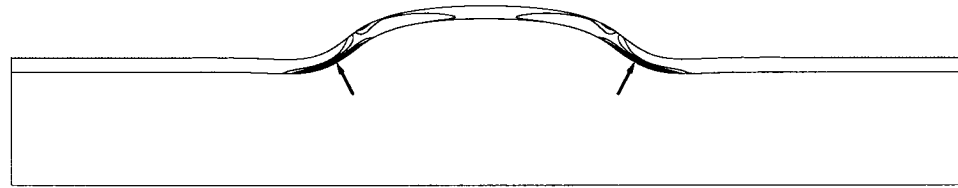
c) Artère isolée



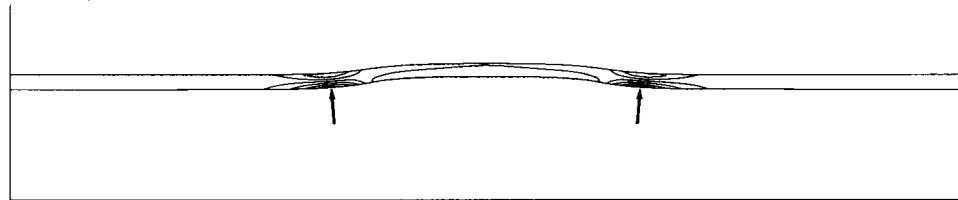
d) Artère avec tissus musculaires

FIG. 6.10 Vecteurs vitesse et ligne de courant.

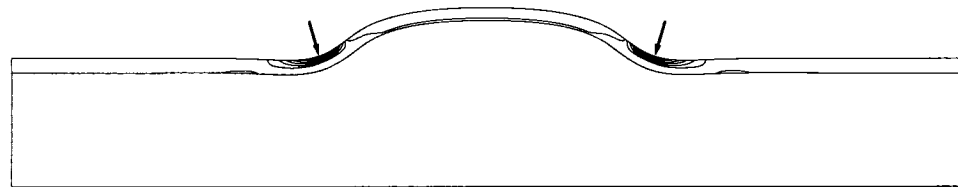
La figure 6.11 illustre les iso-valeurs des contraintes principales, σ_1 et σ_2 , pour les deux cas d'artères. On identifie par des flèches les endroits où la paroi est la plus sollicitée.



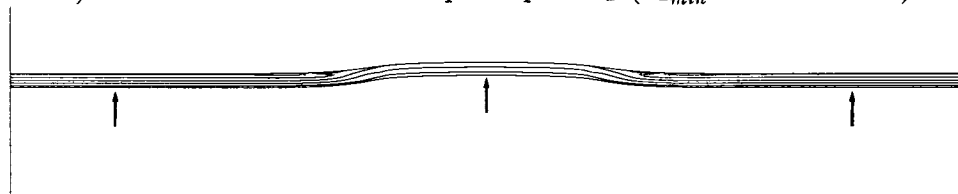
a) Artère isolée : contrainte principale σ_1 ($\sigma_{1_{max}} = 89912$ Pa)



b) Artère avec tissus : contrainte principale σ_1 ($\sigma_{1_{max}} = 14520$ Pa)



c) Artère isolée : contrainte principale σ_2 ($\sigma_{2_{min}} = -73621$ Pa)



d) Artère avec tissus : contrainte principale σ_2 ($\sigma_{2_{min}} = -13329$ Pa)

FIG. 6.11 Iso-valeurs des contraintes principales pour les deux cas d'artères.

On remarque une réduction considérable des contraintes de tension lorsqu'on considère les tissus musculaires dans la simulation, voir figure 6.11a et 6.11b. Cette réduction provient principalement d'une diminution de flexion de la paroi dans

le cas de l'artère avec tissus comparativement à celui de l'artère isolée. On observe également une réduction considérable des contraintes de compression, voir figure 6.11c et 6.11d. Par contre, on assiste à un déplacement important de la position du maximum des contraintes de compression d'un cas à l'autre. Puisque la flexion de la paroi est beaucoup plus faible, les contraintes de compression maximales sont principalement engendrée par la pression interne sur la partie affaiblie de la paroi.

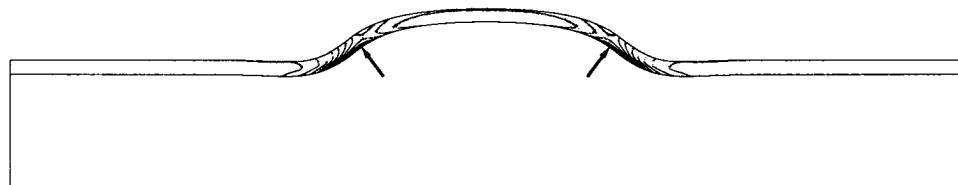
Pour illustrer les déformations dans la paroi artérielle, on utilise les valeurs des déformations principales. La déformation principale ϵ_1 correspond à un étirement de la structure tandis que ϵ_2 correspond à un écrasement de la structure. On obtient les déformations principales à l'aide des relations suivante :

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{rr}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{rr}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{xr}}{2}\right)^2} \quad (6.12)$$

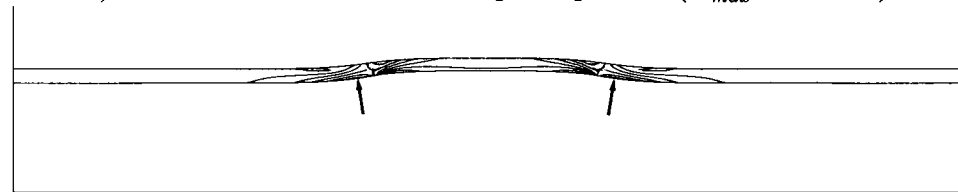
$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{rr}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{rr}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon_{xr}}{2}\right)^2} \quad (6.13)$$

La figure 6.12 présente les iso-valeurs des déformations principales, ϵ_1 et ϵ_2 , pour les deux cas d'artère. On identifie par des flèches l'endroit où la paroi est la plus déformée.

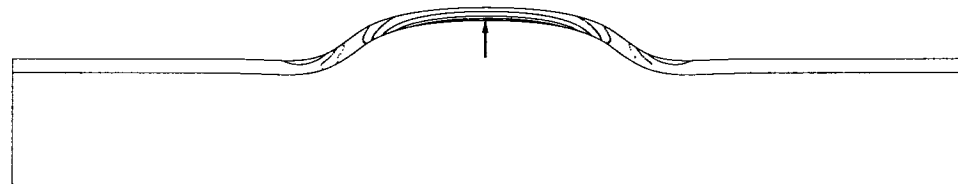
On observe plus d'un ordre de grandeur de différence entre l'étirement maximum que subit l'artère isolée et celle avec tissus, voir figure 6.12a et 6.12b. Dans le cas de la déformation en compression, la différence est beaucoup moins importante puisque le matériau utilisé est compressible, voir figure 6.12c et 6.12d. On peut s'en convaincre en observant la différence d'épaisseur illustrée à la figure 6.9. Le changement d'épaisseur entre l'artère isolée et celle avec tissus musculaires est presque identique dans la zone de faiblesse. Bien que ceci ne nous renseigne pas sur le comportement de la valeur maximale de la déformation de compression dans la



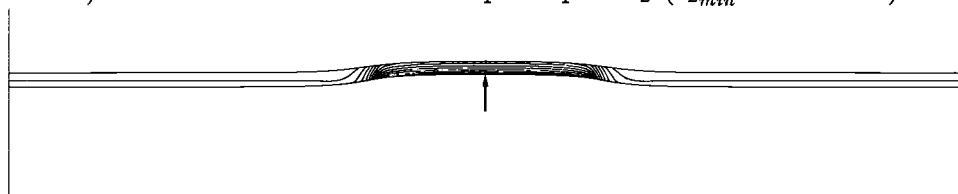
a) Artère isolée : déformation principale ϵ_1 ($\epsilon_{1_{max}} = 40.4\%$)



b) Artère avec tissus : déformation principale ϵ_1 ($\epsilon_{1_{max}} = 2.6\%$)



c) Artère isolée : déformation principale ϵ_2 ($\epsilon_{2_{min}} = -36.4\%$)



d) Artère avec tissus : déformation principale ϵ_2 ($\epsilon_{2_{min}} = -14.9\%$)

FIG. 6.12 Iso-valeurs des déformations principales pour les deux cas d'artères.

paroi, il nous fournit tout de même des renseignements sur la déformation globale de celle-ci. La présence des tissus avoisinants n'a pratiquement aucune influence sur le niveau de compression de l'artère dans la zone de la faiblesse.

En comparant deux à deux les sous-figures (6.11a et 6.12a, 6.11b et 6.12b, 6.11c et 6.12c, 6.11d et 6.12d), on remarque un décalage entre la zone où la paroi est la plus sollicitée et celle où se produit la déformation maximale. Ce décalage s'explique par la variation du module de Young dans la paroi artérielle. Pour permettre un gonflement de l'artère, on spécifie un module de Young plus faible dans la région centrale de la paroi artérielle. C'est donc là où l'on s'attend à observer les déformations principales maximales. Dans la partie saine de l'artère les contraintes seront nécessairement plus élevées puisque le module de Young est à sa valeur maximale. On s'attend donc à retrouver dans cette région les valeurs maximales des contraintes principales. Dans le cas des contraintes et déformations en compression (σ_1 et ϵ_1), figure 6.11a vs 6.12a et figure 6.11b vs 6.12b, on observe ce léger décalage dans les deux cas. Celui-ci est encore plus significatif dans le cas de l'artère isolée lorsque que l'on compare les contraintes principales, σ_2 et ϵ_2 , voir figure 6.11c vs 6.12c. Cette remarque n'est plus valable pour le cas de l'artère avec tissus avoisinants puisque les contraintes de compression causées par la flexion sont devenues négligeables devant les contraintes engendrées par la pression hydrostatique au voisinage de la portion affaiblie, voir figure 6.11d vs 6.12d.

Globalement, les tissus musculaires diminuent beaucoup le niveau des contraintes principales et réduisent les déformations de façon significative. L'influence des tissus avoisinants ne peut donc pas être négligée.

6.2 Glaucome

La dernière application traite le cas d'une maladie de l'oeil appelée glaucome. La forme la plus répandue de cette maladie est le glaucome à angle ouvert. Ce type de glaucome est une dégradation du nerf optique à évolution lente causée par une élévation de la pression intraoculaire. La perte de la vision associée au glaucome est permanente.

L'humeur aqueuse, le liquide à l'intérieur du globe oculaire, est régulièrement évacué de l'oeil à travers un filtre, appelé le réseau trabéculaire situé près de l'iris. En cas de glaucome, ce filtre se bouche, l'humeur aqueuse s'accumule et provoque une augmentation de pression à l'intérieur de l'oeil. Cette augmentation de pression comprime la base du nerf optique et endommage ses fibres nerveuses. Si la pression demeure élevée, la base du nerf optique migrera vers l'extérieur de l'oeil provoquant un rétrécissement du champ de vision qui diminuera d'avantage avec le temps, jusqu'à causer la cécité.

6.2.1 Description du problème

Le problème du glaucome a déjà fait l'objet d'une étude numérique comme le montre les travaux de Sigal et al. ^[36]. Nous avons principalement basé notre étude sur celle de Sigal et al. ^[36] pour tenter de reproduire leurs résultats. Nous avons utilisé leur premier modèle géométrique et effectué deux simulations numériques. La première pour une valeur normale de la pression interne (15 mm Hg) et la deuxième pour une valeur extrême (50 mm Hg) correspondant à un oeil atteint de glaucome.

Les caractéristiques géométriques et mécaniques du problème sont tirés des travaux

de Sigal et al. ^[36], et présentés à la figure 6.13 et au tableau 6.4.

La sclérotique est la principale structure du globe oculaire. Cette structure lui donne sa forme sphérique. La rétine est un tissu mou qui capte la lumière et la transmet vers le nerf optique. Le passage de l'information captée par la rétine se fait de l'intérieur vers l'extérieur de l'oeil à travers de la lamina cribrosa, une matrice poreuse. Nous avons omit de modéliser l'ouverture à l'avant de l'oeil correspondant à l'iris pour reproduire le modèle géométrique utilisé par Sigal et al. ^[36].

	Paramètres	dimensionnels	adimensionnels
Propriétés géométriques	r_{scl}	12 mm	40
	e_{scl}	0.78 mm	2.6
	e_{ret}	0.24 mm	0.8
	r_{cnl}	0.76 mm	2.53
	$r_{crb_{scl}}$	0.05 mm	0.15
	$r_{crb_{lc(int)}}$	12.4 mm	41.33
	$r_{crb_{lc(ext)}}$	12.7 mm	42.33
	$r_{lc(int)}$	0.9 mm	3
	$r_{lc(ext)}$	1.07 mm	3.56
	e_{lc}	0.3 mm	1
Propriétés mécaniques	E_{scl}	3 MPa	450
	E_{lc}	0.3 MPa	45
	E_{ret}	0.06 MPa	9
	E_{opt}	0.06 MPa	9
	ν_{scl}	0.49	0.49
	ν_{lc}	0.49	0.49
	ν_{ret}	0.49	0.49
	ν_{opt}	0.49	0.49

TAB. 6.4 Propriétés géométriques et mécaniques de l'oeil.

La sclérotique a un rayon de r_{scl} et une épaisseur constante de e_{scl} . La rétine a une épaisseur e_{ret} sur la majeure partie de sa surface et s'amincit progressivement pour atteindre une épaisseur nulle à 120° de l'axe de symétrie. Dans la zone du nerf optique, la rétine prend une forme particulière caractérisée par une bosse suivie d'un creux

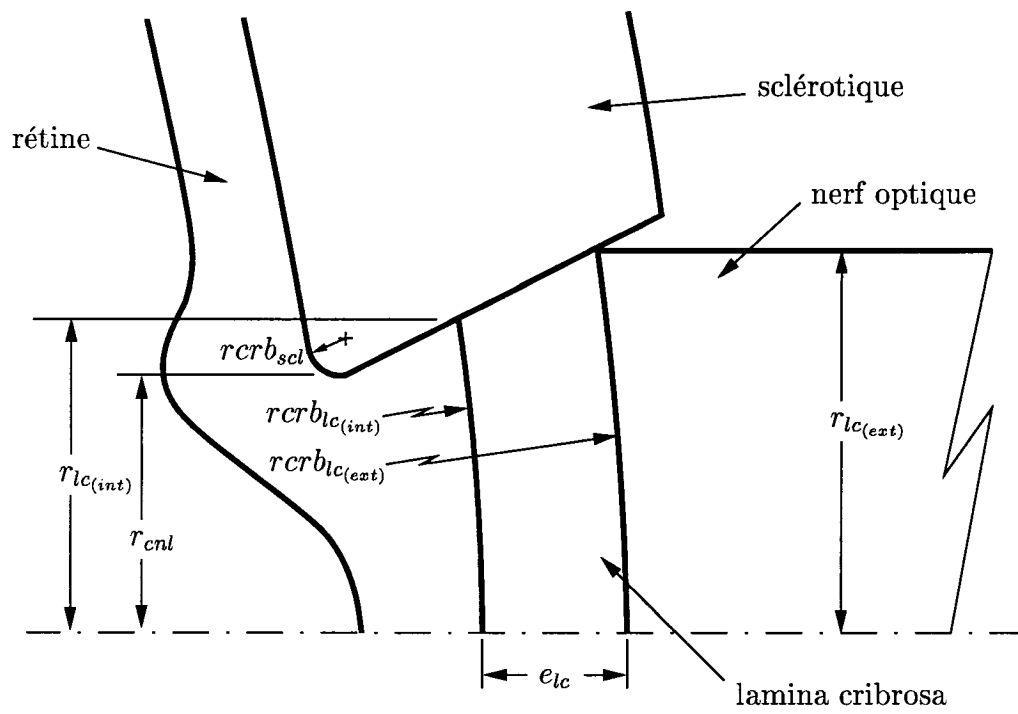
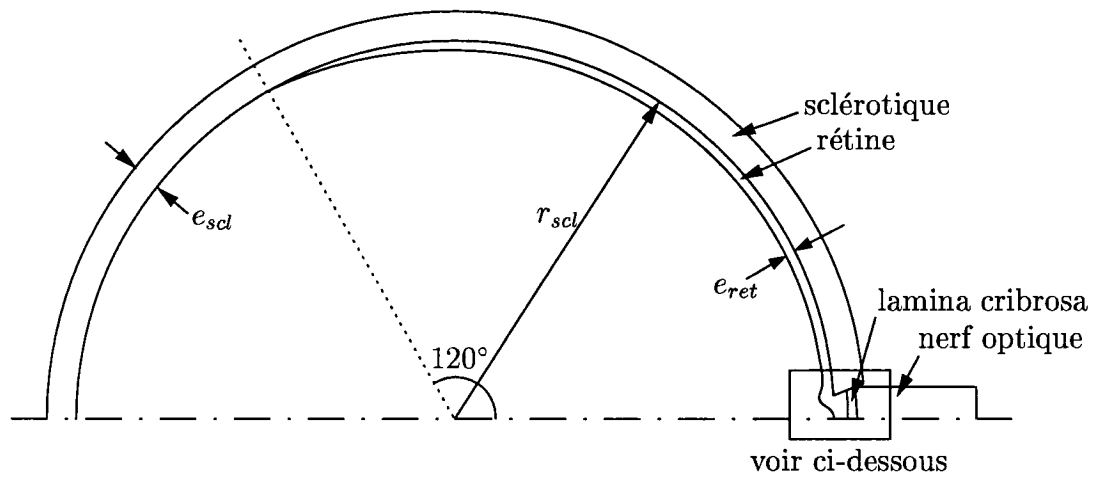


FIG. 6.13 Géométrie de l'oeil.

qui coïncide avec l'axe de symétrie. On appelle cette région la papille. La lamina cribrosa est une structure poreuse ayant la forme d'un disque courbe d'une épaisseur e_{lc} . La face intérieure a un rayon de $r_{lc(int)}$ et un rayon de courbure de $r_{crb_{lc(int)}}$. La face extérieure, quant à elle, a un rayon de $r_{lc(ext)}$ et un rayon de courbure de $r_{crb_{lc(ext)}}$. Nous avons ajouté un arondi sur la structure de la sclérotique, $r_{crb_{scl}}$, comme dans le modèle de Sigal et al. [36]. Finalement, r_{cni} correspond au rayon du canal sclérotique par lequel passe le nerf optique. Les paramètres E_{scl} , E_{lc} , E_{ret} et E_{opt} sont respectivement les modules de Young de la sclérotique, la lamina cribrosa, la rétine et le nerf optique. La même notation s'applique aux coefficients de Poisson. Mentionnons que le module de Young de la rétine et du nerf optique sont deux fois plus élevés que ceux utilisés par Sigal et al. [36]. Nous avons fait ce choix pour la simple raison qu'il nous a été impossible de résoudre le problème pour un module de Young de 0.03 MPa à cause de problèmes de difficultés de convergence du solveur. Heureusement, selon une étude de sensibilité faite par Sigal et al. [36], ce choix n'a que très peu d'influence sur les déformations de la lamina cribrosa. Donc, on peut quand même comparer nos résultats en ce qui concerne les déplacements de la lamina cribrosa.

On considère qu'il n'y a aucune vitesse dans l'humeur aqueuse. On simule l'effet de haute pression du glaucome en imposant une pression à la structure interne de l'oeil par la méthode des réactions modifiées, telle que présentée à la section 6.1.2. On retrouve les propriétés du fluide au tableau 6.5. Comme l'écoulement est nul, on peut alors choisir des valeurs adimensionnelles de ρ et μ de façon arbitraire.

Le paramètre P_{norm} est la pression normale à l'intérieur de l'oeil que l'on rencontre chez un adulte. Elle varie entre 12 mmHg et 20 mmHg. La valeur que nous avons choisi est de 15 mmHg. Dans le cas d'un glaucome, cette pression est beaucoup plus élevée, de l'ordre de 50 mmHg. Deux simulations ont été faites pour comparer les déformations dans la lamina cribrosa pour une pression normale et anormale. On

		Paramètres	dimensionnels	adimensionnels
Pression	(simul. 1)	P_{norm}	15 mmHg	0.3
intra-oculaire	(simul. 2)	P_{anorm}	50 mmHg	1
Propriétés de l'humeur aqueuse		ρ		1
		μ		1

TAB. 6.5 Valeur des paramètres de l'humeur aqueuse.

s'intéresse également aux déplacements subit par la papille et la lamina cribrosa.

Pour les deux simulations, on utilise les valeurs adimensionnelles des propriétés de la structure de l'oeil et de l'humeur aqueuse présentées aux tableaux 6.4 et 6.5. Les valeurs de référence utilisées pour adimensionnaliser les paramètres sont :

$$L_{ref} = e_{lc} = 0.3 \text{ mm} \quad (6.14)$$

$$E_{ref} = P_{anorm} = 6665 \text{ Pa} \quad (6.15)$$

$$P_{ref} = P_{anorm} = 6665 \text{ Pa} \quad (6.16)$$

Comme nous n'avons aucune vitesse dans le fluide, il nous est impossible d'adimensionnaliser la pression par rapport à la pression dynamique. On choisi alors la pression hydrostatique comme pression de référence. Comme précédemment, on adimensionnalise également le module de Young des différentes structures de l'oeil par rapport à la pression hydrostatique.

Il ne reste qu'à appliquer les conditions frontières sur chacun des sous-domaines de calcul. La figure 6.14 illustre toutes les condition frontières qui s'appliquent au sous-domaine fluide (humeur aqueuse) et aux quatres sous-domaines solides (la sclérotique, la rétine, la lamina cribrosa et le nerf optique).

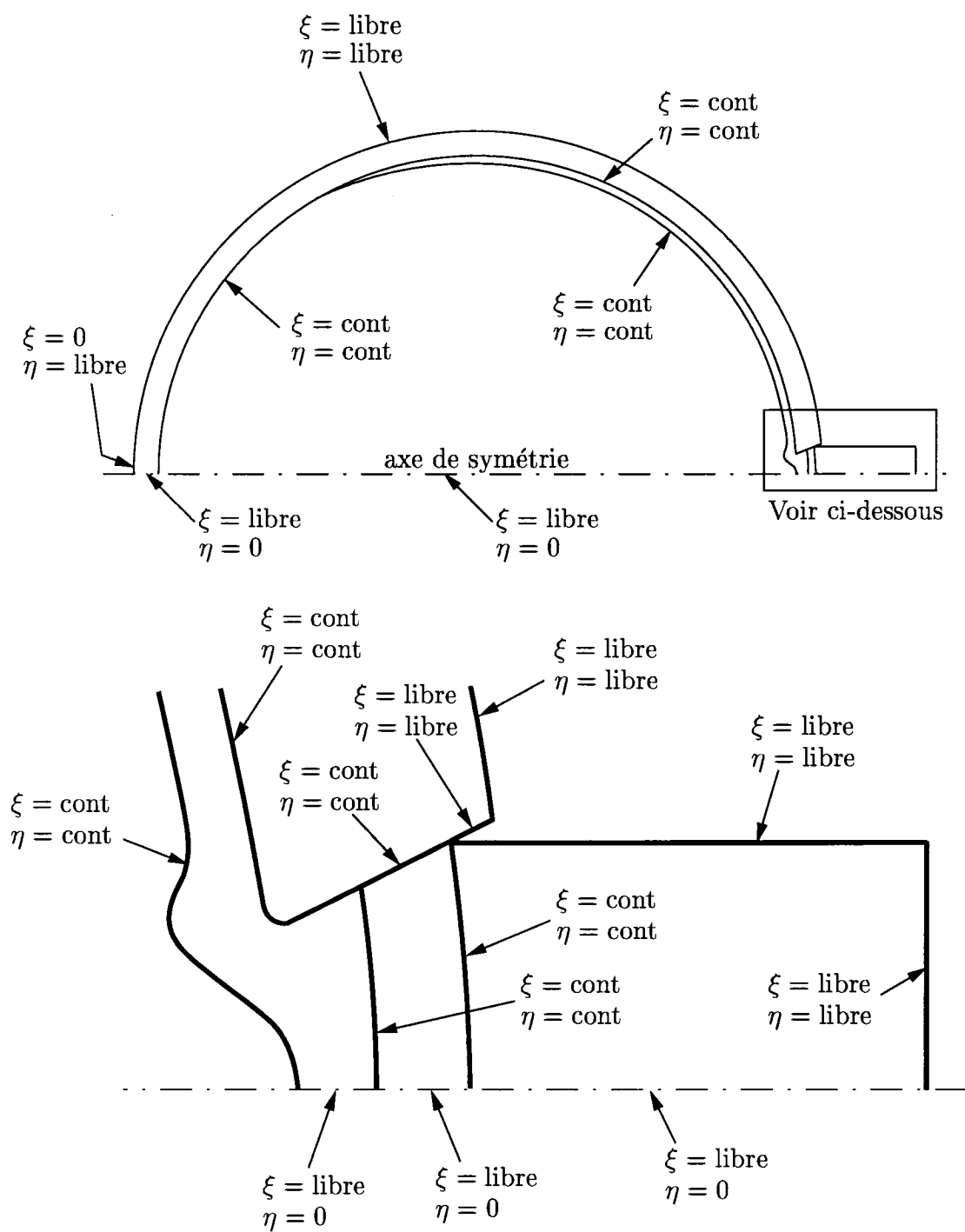


FIG. 6.14 Conditions frontières.

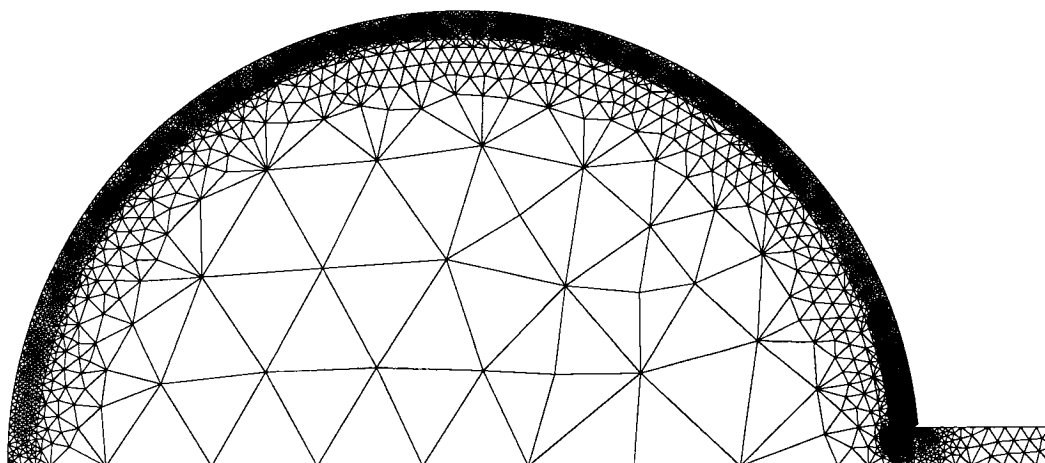
Nous avons bloqué les déplacements en ξ et laissé *libre* les déplacements en η sur une toute petite portion de frontière à l'avant de l'oeil. Cette condition est nécessaire pour éliminer la translation de corps rigide. On permet à toutes les autres frontières externes de l'oeil de se déplacer librement en appliquant $\xi = \eta = \text{libre}$. Nous avons appliqué une condition de symétrie en bloquant tous les déplacements en η et en appliquant une condition *libre* en ξ sur les frontières qui coïncident avec l'axe de symétrie. Pour toutes les autres frontières, on applique une condition *cont.* Cette condition signifie la continuité des déplacements et des forces. Il faut noter que nous avons imposé une vitesse nulle sur toutes les frontières. Nous avons omis de l'indiquer pour alléger les figures.

6.2.2 Résultats

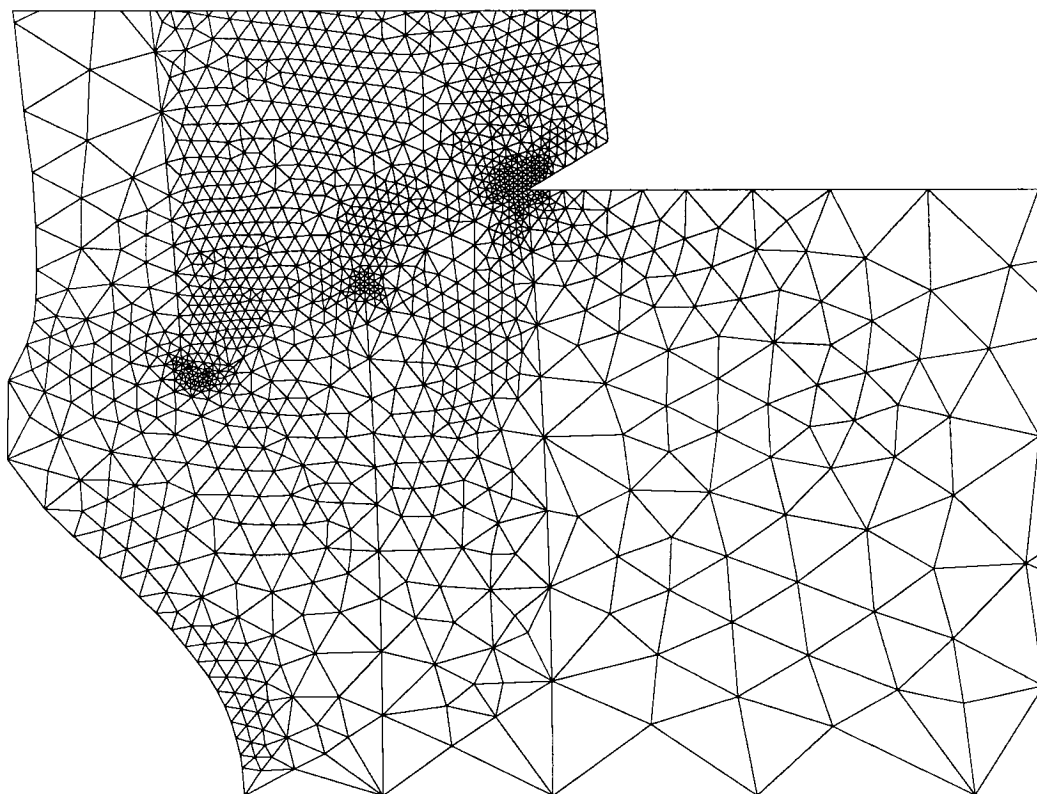
La figure 6.15 et 6.16 montrent le maillage obtenu pour les simulations à des pressions oculaires de 15 mmHg et 50 mmHg.

On remarque immédiatement le raffinement uniforme sur l'arrondi de la sclérotique et à la jonction de la lamina cribrosa, de la sclérotique et du nerf optique, voir la figure 6.13 pour terminologie. Ce raffinement est volontaire de notre part et aide à la convergence du solveur. La présence de singularités causées par la géométrie pointue de certaines zones provoque des instabilités dans la résolution. Le seul moyen que nous avons trouvé pour adoucir ces singularités était d'éviter de mailler les régions concernées avec de très petits éléments.

Sous l'action de la pression interne, toute la structure de l'oeil se déforme. Notre étude se concentre essentiellement sur les déplacements et déformations de la papille et de la lamina cribrosa. Sigal et al. ^[36] fournissent des mesures expérimentales du déplacement de la papille et de la lamina cribrosa.

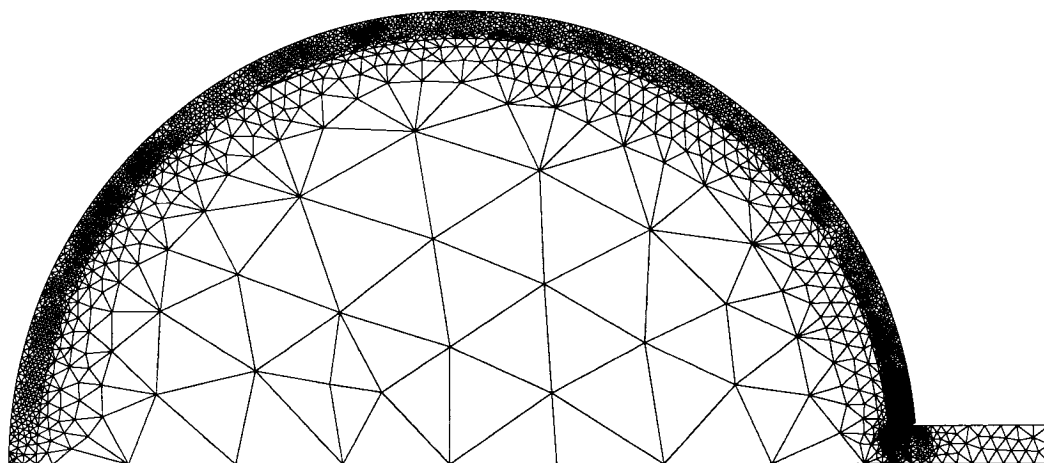


Maillage complet (24044 noeuds).

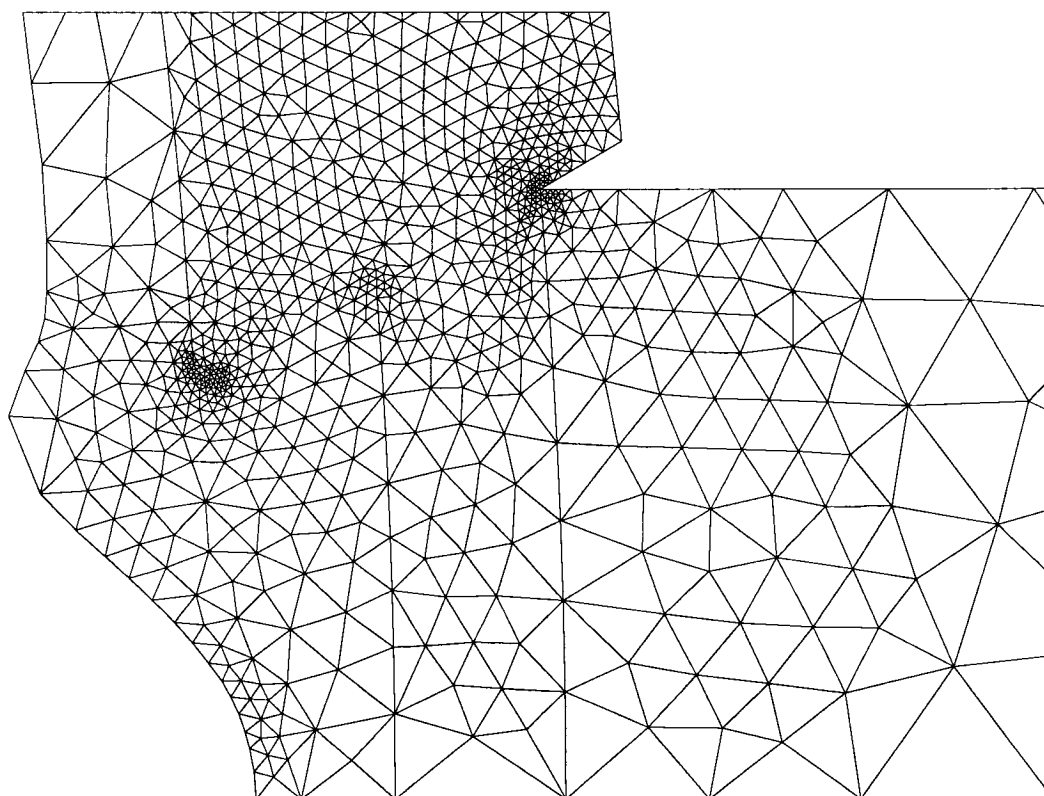


Maillage dans la région de la lamina cribrosa.

FIG. 6.15 Maillages de l'oeil pour une pression interne de 15 mmHg.



Maillage complet (15192 noeuds).



Maillage dans la région de la lamina cribrosa.

FIG. 6.16 Maillages de l'oeil pour une pression interne de 50 mmHg.

La figure 6.17 illustre bien les déplacements de la structure de l'oeil. On montre les déplacements obtenus pour une pression anormale de 50 mmHg. La figure en lignes pleines correspond à la configuration déformée tandis que celle en lignes tiretées correspond à la configuration non déformée.

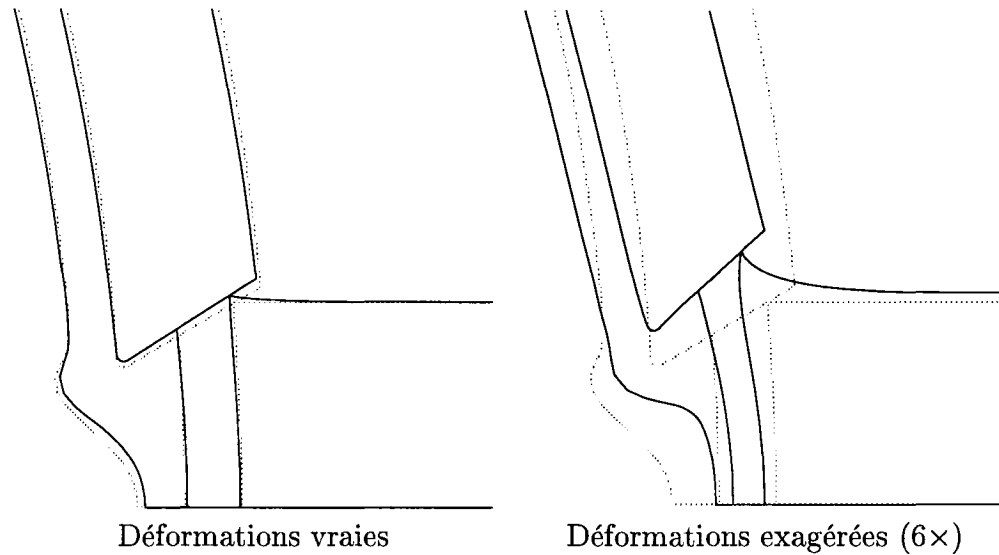


FIG. 6.17 Déformations vraies et amplifiées.

La différence entre les déplacements pour une pression de 15 mmHg et ceux résultant d'une pression de 50 mmHg est faible. Une fois qu'on a attaché l'oeil en ξ à l'avant, voir figure 6.14, la lamina cribrosa se déplace vers la droite de 0.26 mm. Pour nous permettre de comparer les deux ensembles de déplacements, il a fallu recentrer les résultats sur une origine géométrique commune comme l'on fait Sigal et al. [36]. La première origine commune se situe à la surface de la rétine à 5° de l'axe de symétrie, voir figure 6.18. Cette origine est utilisée pour comparer les déplacements de la papille dans le cas d'une pression de 15 mmHg et 50 mmHg. La deuxième origine se situe sur la face interne du disque de la lamina cribrosa à la jonction de la sclérotique, voir figure 6.18. Cette second origine est utilisée afin de comparer les déplacements de la lamina cribrosa.

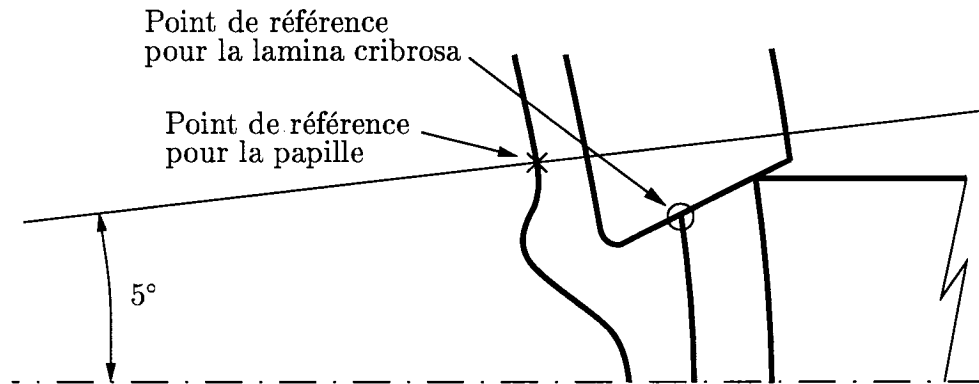


FIG. 6.18 Croquis de la position du point de référence pour la mise à zéro.

On compare à la figure 6.19 le déplacement relatif de la papille lorsque que la pression passe de 15 mmHg à 50 mmHg avec les résultats obtenus par Sigal et al. ^[36] et des données expérimentales. Les déplacements sont tracés en millimètres en fonction de la position verticale à partir de l'axe de symétrie.

Les résultats obtenus concernant le déplacement relatif de la papille sont quelque peu différents. Le déplacement relatif sur l'axe de symétrie que nous avons obtenu est de 0.027 mm comparativement à environ 0.029 mm. De plus, le déplacement relatif maximum que nous avons obtenu est de 0.035 mm comparativement à environ 0.037 mm. Cette différence provient du fait que le module de Young de la rétine que nous avons utilisé est deux fois plus élevé que ceux de Sigal et al. ^[36]. Le déplacement est donc nécessairement plus petit. Par contre l'allure de la courbe est très similaire à celle qu'ils ont obtenue.

À la figure 6.20 on compare cette fois les déplacements de la lamina cribrosa lorsque la pression interne passe de 15 mmHg à 50 mmHg.

Sur cette figure, on remarque que l'origine commune des résultats de Sigal et al. ^[36] ne coïncide pas avec la nôtre. Cette déviation est soit causée par une mauvaise

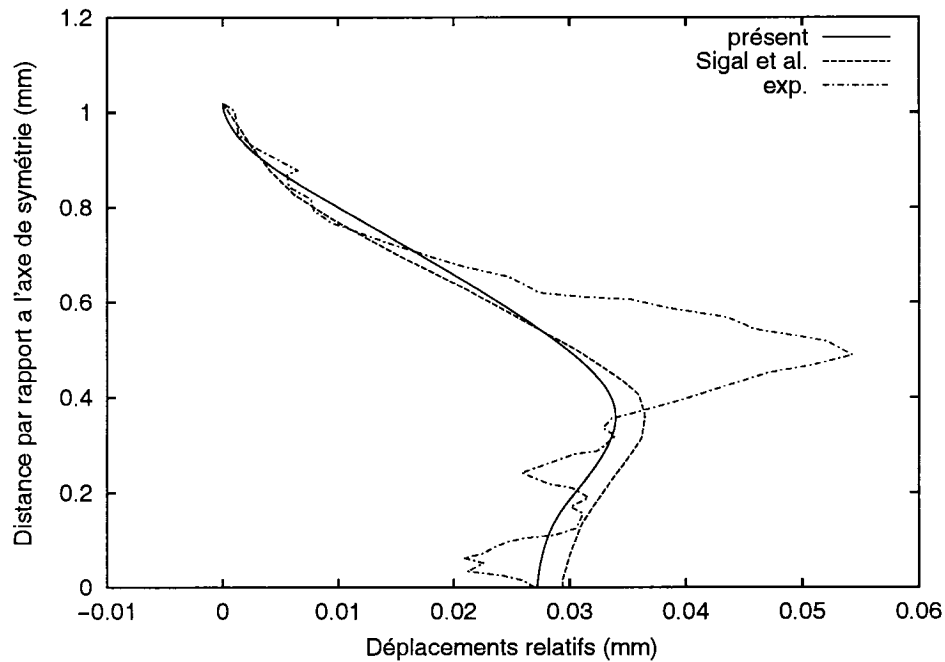


FIG. 6.19 Déplacements relatifs de la papille pour une pression interne qui passe de 15 mmHg à 50 mmHg.

interprétation de notre part ou par une irrégularité dans leurs résultats. Nous avons tout de même pu comparer les résultats que nous avons obtenus avec les leurs. Il a seulement suffi de décaler la courbe qu'ils ont obtenue pour faire correspondre leur mesure la plus éloignée de l'axe de symétrie avec la mesure que nous avons fait à cette même position. On utilise cette position comme référence. Cette procédure ne change en rien la justesse de la comparaison puisqu'il s'agit de déplacement relatif. On remarque une différence considérable entre les déplacements que nous avons obtenus et ceux de Sigal et al. ^[36]. Nous avons obtenu un déplacement maximum de 0.0167 mm comparativement à environ 0.0204 mm. Par contre, l'allure de la courbe est très semblable. Ce résultat semble surprenant puisque dans le cas de la papille, les courbes sont beaucoup plus similaires. Il faudrait sans aucun doute avoir accès à des données expérimentales de ce déplacement pour valider nos résultats et

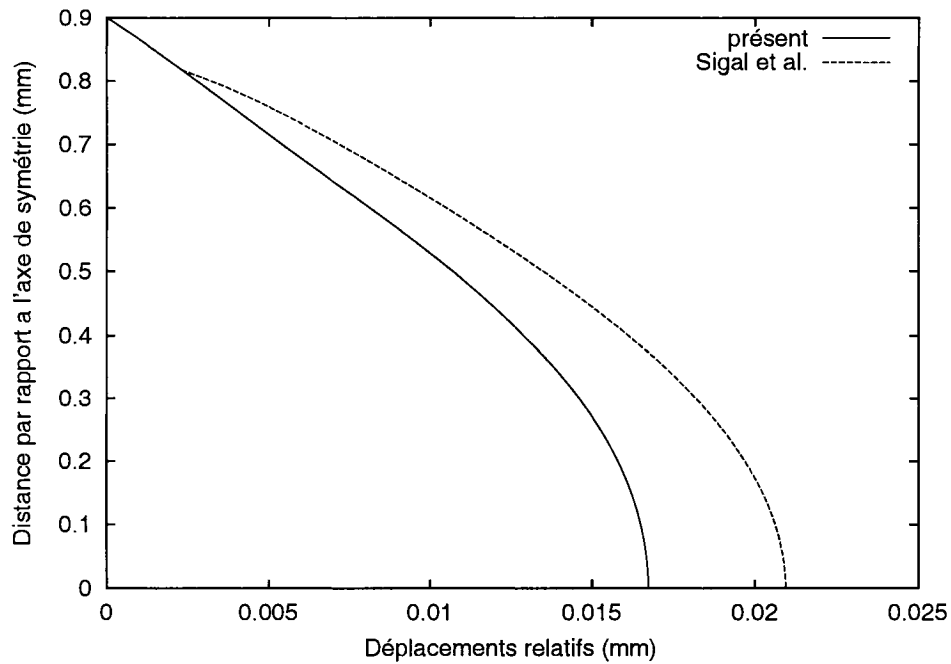
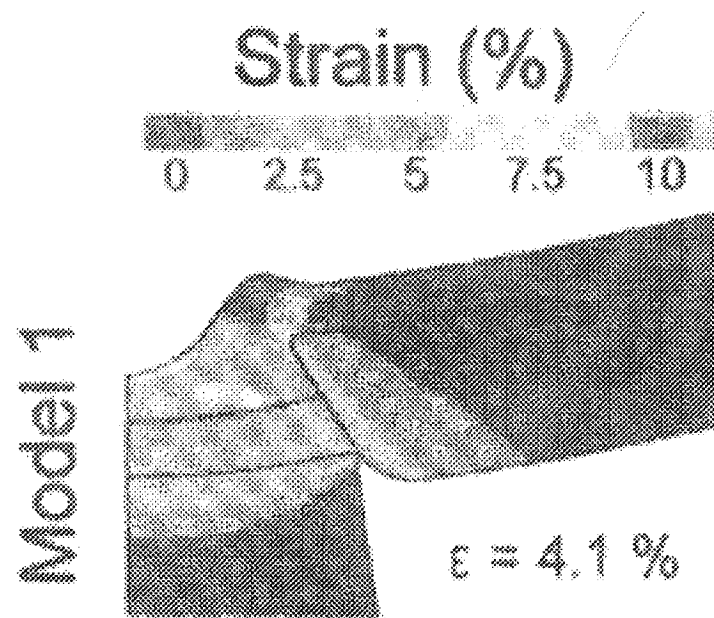
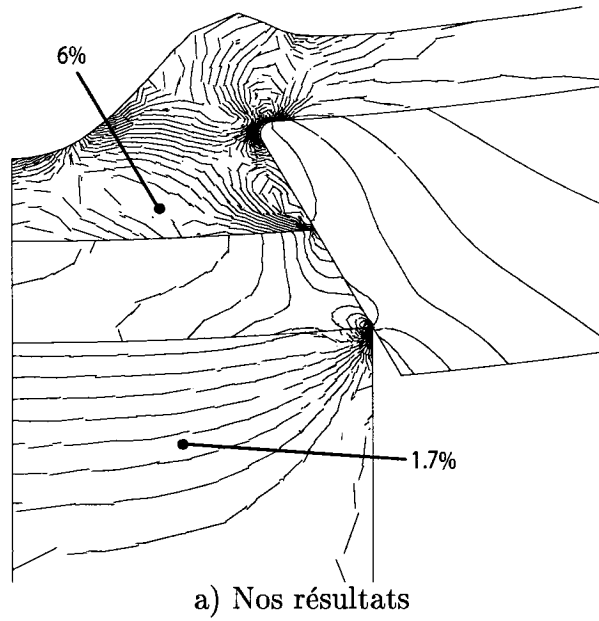


FIG. 6.20 Déplacements relatifs de la lamina cribrosa pour une pression interne qui passe de 15 mmHg à 50 mmHg.

ceux de Sigal et al.

Le dernier élément de comparaison est la distribution des déformations principales. La figure 6.21 présente la première déformation principale dans la région de la lamina cribrosa. Pour notre simulation et celle de Sigal et al. [36]. On exprime la première déformation principale à l'aide de l'expression 6.12. Bien que la qualité de la figure 6.21a soit très moyenne, on peut tout de même comparer les iso-valeurs des déformations principales que nous avons obtenues avec celles de Sigal et al. [36]. En fait, la convergence de la simulation pour une pression de 50 mmHg a été impossible pour des maillages plus raffinés que celui de la figure 6.16. Il a donc fallu se contenter de ce maillage de 15192 noeuds pour faire l'analyse des résultats. De plus, on notera que la déformation est une quantité discontinue car on l'obtient en évaluant les dérivées des déplacements. C'est pour ces raisons que les

iso-valeurs des déformations principales sont très discontinues. On observe tout de même une similarité dans l'évolution des maximums et minimums des déformations principales dans la papille, le nerf optique, la lamina cribrosa et la sclérotique. Nous avons un maximum local de déformation dans la région de la papille tout près de la lamina cribrosa d'une valeur de 6%, voir figure 6.21a. Sigal et al. ^[36] on obtenu une valeur similaire, voir figure 6.21b. De même que pour la déformation du nerf optique où encore une fois, nous avons obtenu une déformation de 1.7%, une déformation similaire à celle obtenue par Sigal et al. ^[36]. De plus, Sigal et al. ^[36] ont évalué la moyenne des déformations principales dans la lamina cribrosa à 4.1% comparativement à grossièrement 3.8% pour nous.



b) Sigal et al. [36]

FIG. 6.21 Première déformations principales.

CONCLUSION

L'objectif premier de ce mémoire, qui était d'étendre au cas axisymétrique le code de simulation d'interactions fluide-structure 2D, a été atteint. Nous avons tout d'abord développé les équations d'élasticité en grand déplacement dans un repère axisymétrique que nous avons par la suite implémentées dans le code d'éléments finis. La stratégie de résolution que nous avons utilisée pour le couplage fort reposait essentiellement sur l'utilisation du pseudo-solide pour générer la déformation du domaine fluide induite par les déplacements de la structure et de la méthode des réactions implicites à l'aide d'un élément d'interface. Nous en avons développé une variante, appelée méthode des réactions modifiées, qui s'est avérée indispensable pour résoudre avec succès les cas d'application auxquels nous avons fait face. Cette stratégie nous a permis de coupler implicitement tous les degrés de liberté impliqués dans la résolution.

L'implémentation des équations a été vérifiée à l'aide de la méthode des solutions manufacturées. Pour y arriver, nous avons tout d'abord élaboré une démarche générale pour développer une famille de solution non triviale aux équations d'interactions fluide-structure dans un repère axisymétrique. Ensuite, nous avons effectué une étude de raffinement adaptatif du maillage qui ont confirmé l'implémentation correcte des éléments finis. Ces calculs ont mis en évidence l'exactitude asymptotique de l'estimateur d'erreur pour l'écoulement et la structure. Nous avons observé un taux de convergence par rapport à la taille du maillage en accord avec la théorie. Ainsi, nous avons pu aborder en tout confiance les divers cas d'application.

Les deux premiers cas d'application concernaient un écoulement sanguin dans l'artère abdominale présentant une section affaiblie. Ces deux simulations avaient pour but de mesurer l'effet des tissus avoisinants sur le comportement de la paroi

artérielle et de l'écoulement sanguin. On a pu observer que les tissus avoisinants ont un effet d'amortissement très important sur le déplacement de la paroi et la géométrie de celle-ci dans la configuration déformée. Ils ont aussi un impact majeur sur les contraintes et déformations dans la paroi artérielle. On a pu également constater la présence de zone de recirculation dans le cas isolée et son absence lorsque l'on tient compte des tissus avoisinants.

Le dernier cas d'application se penchait sur une maladie oculaire appelée glaucome. Nous avons utilisé les travaux de Sigal et al. ^[36] pour construire un modèle simplifié mais tout de même réaliste de l'oeil. L'objectif de cette simulation était de comparer les prédictions de notre méthode adaptative aux prédictions et mesures de Sigal et al. ^[36]. Nous avons pu observer une concordance appréciable entre nos résultats et ceux de Sigal et al. ^[36].

La voie à suivre quant au développement futur du code de calcul actuel serait dans la direction du transitoire en interactions fluide-structure. Ce module permettrait de simuler avec beaucoup plus de réalisme des écoulements sanguin dans des artères, un phénomène intrinsèquement instationnaire. De plus, le développement d'un solveur 3D nous permettrait d'élargir notre champ d'application de façon significative dans un domaine en pleine croissance tel que l'ingénierie appliquée aux sciences biomédicales.

RÉFÉRENCES

- [1] ATANACKOVIC, T. M., GURAN, A. *Theory of elasticity for scientists and engineers*, Birkhauser Boston, 2000.
- [2] BATHE, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1982.
- [3] BERGEL, D. H. *The static elastic properties of the arterial wall*. Journal of physiology 156 :445-457, 1961.
- [4] BONET, J., Wood, R. D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- [5] CHEN, H. Y. H., SHEU, T. W. H. *Finite-element simulation of incompressible fluid flow in an elastic vessel*. International journal for numerical methods in fluids 42 :131-146, 2003.
- [6] CHIANDUSSI, G., BUGEDA, G., ONATE, E. *A simple method for automatic update of finite element meshes*. Communications in numerical methods in engineering 16 :1-19, 2000.
- [7] COMOLET, R. *Biomécanique circulatoire*. Masson, Paris, 1984.
- [8] CURRIE, I. G. *Fundamental mechanics of fluids*, Marcel Dekker, Inc., 2003.
- [9] DEGAND C., FARHAT C. *A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes*. Computers and Structures 80 :305-316, 2001.
- [10] DE HART, J., PETERS, P. J. G., BAAIJENS, F. P. T. *A two-dimensional fluid-structure interaction model of the aortic valve*. Journal of Biomechanics 33 :1079-1088, 2000.
- [11] DHATT, G., TOUZOT, G. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Les Presses de l'Université Laval, Québec, Canada, 1981.

- [12] DONEA, J., GIULIANI, S., HALLEUX, J. P. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 33 :1-3. 689-723, 1982.
- [13] DUBIGEON, S. *Mécanique des milieux continus*, École Central de Nantes, 1986.
- [14] ÉTIENNE, S., Pelletier, D., Garon, A. *An updated lagrangian monolithic formulation for steady-state fluid-structure interaction problems*. 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 2005.
- [15] FARHAT C., DEGAND C., KOOBUS B., LESOINNE, M. *torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 163 :231-245, 1998.
- [16] FERNANDEZ, M. A., MOUBACHIR, M. *A newton method using exact jacobians for solving fluid-structure coupling*. Computers and Structures, 83 :2-3. 127-142, 2005.
- [17] FREY, P. J., GEORGE, P-L. *Maillages*, Hermes Science Publications, 1999.
- [18] FUNG, Y. C. *Biomechanics : Mechanical Properties of Living Tissues*. New York : Springer-Verlag, 1993.
- [19] GRATTAS, O., LI, X. *Domain decomposition methods for sensitivity analysis of a nonlinear aeroelasticity problem*. International journal of computational fluid dynamics 11 :113-130, 1998.
- [20] HEIL, M. *Stokes flow in an elastic tube - A large-displacement fluid-structure interaction problem*. International journal for numerical methods in fluids 28 :243-265, 1998.
- [21] HÉTU, J.-F. *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements visqueux incompressible*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada, 1991.

- [22] HIRT, C. W., AMDSEN, A. A., COOK, J. L. *An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds*. Journal of computational physics, 14 :227-53, 1974.
- [23] HUGHES T. J. R., LIU, W. K., ZIMMERMAN T. K. *Lagrangian Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 29 :329-349, 1981.
- [24] LOHNER, R., YANG, C. *Improved ALE mesh velocities for moving bodies*. Communications in numerical methods in engineering 12 :599-608, 1996.
- [25] LUND, E., MOLLER, H., JACKOBSEN, L.A. *Shape desing optimization of steady fluid-structure interaction problems with large displacements*. In AIAA 2001-1624, 2001.
- [26] MCDONALD, D. A. *Blood flow in arteries*. London, Edward Arnold, 1974.
- [27] NIELSEN E. J., ANDERSON, W. K. *Recent improvements in aerodynamic design optimization on unstructured meshes*. In AIAA 2001-0596, 2001.
- [28] PAÏDOUSSIS, M. P. *Fluid-structure interactions*. Academic Press, 1998.
- [29] PESKIN, C., McQueen, D. *A tree-dimensional computation method for blood flow in the heart - 1 immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid*. Journal of computational physics 81 :2. 372-405, 1989.
- [30] QUARTERONI, A., TUVERI, M., VENEZIANI, A. *Computational vascular fluid dynamics : problems, models and methods*. Computing and visualization in science 2 :163-197, 2000.
- [31] REDDY, J. N. *An introduction to the finite element method*. McGraw-Hill, 1984.
- [32] RIDEOUT, V. C., DICK, D. E. *Difference-differential equations for fluid flow in distensible tubes*. IEEE transactions on bio-medical engineering, Vol. BME-14, No. 3, July 1967.

- [33] ROACHE, P. J. *Verification and validation in computational science and engineering*. Hermosa publishers, Albuquerque, New Mexico, 1998.
- [34] SACKINGER, P. A., SCHUNK, P. R., RAO, R. R. *A newton-raphson pseudo-solid domain mapping technique for free and moving boundary problems : A finite element implementation*. Journal of computational physics 125 :83-103, 1996.
- [35] SHERWIN, S. J., FORMAGGIA, L., PEIRO, J., FRANKE, V. *Computational modelling of 1D blood flow with variable mechanical properties and its application to the simulation of wave propagation in the arterial system*. International journal for numerical methods in fluids 43 :673-700, 2003.
- [36] SIGAL, I. A. *Finite element modeling of optic nerve head biomechanics*. Investigative Ophthalmology Visual Science 45 :12. 4378-4387, 2004.
- [37] SNYDER, M. F., RIDEOUT, V. C., HILLESTAD, R. J. *Computer modeling of the human systemic arterial tree*. Journal of biomechanics 1 :341-353, 1968.
- [38] STEINMAN, D. A., Ethier, C. R. *The effect of wall distensibility on flow in a two-dimensional end-to-side anastomosis*. Journal of Biomechanical Engineering, Transactions of the ASME 116 :3. 294-301, 1994.
- [39] SUD, V. K., SEKHON, G. S. *Steady flow of a viscous fluid through a network of tubes with applications to the human arterial system*. Journal of Biomechanics 23 :6. 513-527, 1990.
- [40] TAYLOR, C. A., HUGHES, T. J. R., ZARINS, C. K. *Finite element modeling of blood flow in arteries*. Computer methods in applied mechanics and engineering 158 :155-196, 1998.
- [41] TURGEON, É. *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour la résolution des sensibilités d'écoulements*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada, 2001.

- [42] TEIXEIRA, P. R. F., AWRUCH, A. M. *Numerical simulation of fluid-structure interaction using the finite element method*. Computers and fluids 34 :249-273, 2005.
- [43] VAN DE VOSSE, F. N., DE HART, J., VAN OIJEN, C. H. G. A., BESSEMS, D., GUNTHER, T. W. M., SEGAL, A., WOLTERS, B. J. B. M., STIJNEN, J. M. A., BAAIJENS, F. P. T. *Finite-element-based computational methods for cardiovascular fluid-structure interaction*. Journal of engineering mathematics 47 :335-368, 2003.
- [44] VOORDE, V. J., VIERENDEELS, J., DICK, E. *Development of a Laplacian-based mesh generator for ALE calculations in rotary volumetric pumps and compressors*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 193 :4401-4415, 2004.
- [45] WESTERHOF, N., BOSMAN, F., DE VIRES, C. J., NOORDERGRAAF, A. *Analog studies of the human systemic arterial tree*. Journal of biomechanics 2 :121-143, 1969.
- [46] WOMERSLEY, J. R. *Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. The linear approximation for long waves*. The philosophical magazine, 46 :199-221, 1955.
- [47] WOMERSLEY, J. R. *Oscillatory flow in arteries : the constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission*. Physics in medicine and biology, 2 :178-187, 1957.
- [48] ZIENKIEWICZ, O. C., ZHU, J. Z. *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates*. International journal for numerical methods in engineering 33 :1331-1364, 1992.

ANNEXE I

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Dans cette annaexe, on présente les expressions de quelques opérateurs différentiels utiles. On retrouve ces opérateurs dans les équations de navier-Stokes et les équations de l'élasticité.

D'entré de jeu, on définit s comme étant un scalaire, \mathbf{u} comme étant un vecteur et $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ comme étant un tenseur :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_r \\ u_\theta \end{bmatrix} \quad \overline{\overline{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xr} & F_{x\theta} \\ F_{rx} & F_{rr} & F_{r\theta} \\ F_{\theta x} & F_{\theta r} & F_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

En utilisant ces éléments, on peut écrire entre autres les opérations différentielles suivantes :

$$\nabla s = \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (\text{I.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{I.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (\text{I.4})$$

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_r}{\partial x} & \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial x} & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \end{bmatrix} \quad (\text{I.5})$$

$$\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rF_{xr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{x\theta}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rF_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{F_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial F_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_{\theta\theta}}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (\text{I.6})$$

Considérons maintenant deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} et deux tenseurs $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ et $\overline{\overline{\mathbf{G}}}$. On peut procéder à diverses opérations telles que :

– le produit scalaire entre deux vecteurs :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i \quad (\text{I.7})$$

– le produit interne ou double contraction de deux tenseurs :

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}} : \overline{\overline{\mathbf{G}}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 F_{ij} G_{ji} \quad (\text{I.8})$$

– le produit vectoriel d'un vecteur avec un tenseur :

$$\mathbf{v} \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}} = \mathbf{u} \quad \text{tel que} \quad u_j = \sum_{i=1}^3 v_i T_{ij} \quad (\text{I.9})$$

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \quad \text{tel que} \quad u_j = \sum_{i=1}^3 v_i T_{ji} \quad (\text{I.10})$$

ANNEXE II

DÉTAILS DES TERMES SOURCES UTILISÉS POUR SATISFAIRE LES ÉQUATIONS POUR LE FLUIDE ET LE SOLIDE

Dans cette annexe, on presente tous les termes contenu dans les expressions des termes sources nécessaire pour satisfaire les équation qu régissent la partie fluide et la partie solide. Il faut spécifier dès le début que l'indice , x et , r correspond à la dérivée de la quantit. qui le porte par rapport à x et à r respectivement.

Termes sources pour le fluide

On rappel l'expression des termes sources pour le fluide :

$$f_x^f = \rho_f \left(u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_f}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial r^2} \right) - 2 \frac{\partial \mu_f}{\partial x} \frac{\partial u_f}{\partial x} - \frac{\partial \mu_f}{\partial r} \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \quad (\text{II.1})$$

$$f_r^f = \rho_f \left(u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_f}{\partial r} - \mu_f \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial r^2} + \frac{v_f}{r^2} \right) - \frac{\partial \mu_f}{\partial x} \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial \mu_f}{\partial r} \frac{\partial v_f}{\partial r} \quad (\text{II.2})$$

On définit et développe chacun des termes présents dans les expression des termes sources :

– Dérivées du champ de vitesses :

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} = 6rh \sin(2\pi x)\pi - 4 \left[1 + h(1 - \cos(2\pi x)) \right] h \sin(2\pi x)\pi \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{\partial u_f}{\partial r} = 3 + 3h(1 - \cos(2\pi x)) - 4r \quad (\text{II.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} &= 12r \cos(2\pi x)\pi^2 - 8h^2 \sin^2(2\pi x)\pi^2 \\ &\quad - 8[1 + h(1 - \cos(2\pi x))]h \cos(2\pi x)\pi^2 \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{\partial^2 u_f}{\partial r^2} = -4 \quad (\text{II.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_f}{\partial x} &= 4rh^2 \sin^2(2\pi x)\pi^2 \\ &\quad + 4r[1 + h(1 - \cos(2\pi x)) - r]h \cos(2\pi x)\pi^2 \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

$$\frac{\partial v_f}{\partial r} = 2[1 + h(1 - \cos(2\pi x)) - 2r]h \sin(2\pi x)\pi \quad (\text{II.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} &= 24rh^2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi x)\pi^3 \\ &\quad - 8r[1 + h(1 - \cos(2\pi x)) - r]h \sin(2\pi x)\pi^3 \\ &\quad + 4[1 + h(1 - \cos(2\pi x)) - 2r]h \cos(2\pi x)\pi^2 \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{\partial^2 v_f}{\partial r^2} = -4h \sin(2\pi x)\pi \quad (\text{II.10})$$

On explicite les relations qui définissent la distribution de viscosité et de pression et leurs dérivées :

$$\mu_f = \frac{S_x n_r - S_r n_x}{-\mathbf{B}n_x^2 - \mathbf{C}n_x n_r + \mathbf{A}n_x n_r + \mathbf{B}n_r^2} \quad (\text{II.11})$$

$$p_f = \frac{-\mathbf{A}S_r n_x - \mathbf{B}S_r n_r + \mathbf{B}S_x n_x + \mathbf{C}S_x n_r}{-\mathbf{B}n_x^2 - \mathbf{C}n_x n_r + \mathbf{A}n_x n_r + \mathbf{B}n_r^2} \quad (\text{II.12})$$

$$\begin{aligned} \mu_{f,x} &= \frac{1}{(-\mathbf{B}n_x^2 - \mathbf{C}n_x n_r + \mathbf{A}n_x n_r + \mathbf{B}n_r^2)^2} \\ &\quad \left[\left((-\mathbf{B}n_x^2 - \mathbf{C}n_x n_r + \mathbf{A}n_x n_r + \mathbf{B}n_r^2)(S_{x,x}n_r + S_x n_{r,x} - S_r n_x - S_r n_{x,x}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left((S_x n_r - S_r n_x)(-\mathbf{B}_{,x}n_x^2 - \mathbf{C}n_{x,x}n_r + \mathbf{A}n_x n_{r,x} + \mathbf{B}_{,x}n_r^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbf{B}n_{x,x}n_x - \mathbf{C}_{,x}n_x n_r + \mathbf{A}_{,x}n_x n_r + \mathbf{B}n_x n_{r,x} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\mathbf{B}n_x n_{x,x} - \mathbf{C}n_x n_{r,x} + \mathbf{A}n_{x,x} n_r + \mathbf{B}n_{r,x} n_r \end{aligned} \right) \Bigg] \quad (\text{II.13})$$

$$\mu_{f,r} = 0 \quad (\text{II.14})$$

$$\begin{aligned} p_{f,x} = & \frac{1}{(-\mathbf{B}n_x^2 - \mathbf{C}n_x n_r + \mathbf{A}n_x n_r + \mathbf{B}n_r^2)^2} \\ & \left[\left((-\mathbf{B}n_x^2 - \mathbf{C}n_x n_r + \mathbf{A}n_x n_r + \mathbf{B}n_r^2) \right. \right. \\ & \quad (-S_r \mathbf{A}_{,x} n_x - S_r \mathbf{B}_{,x} n_r + S_{x,x} \mathbf{B} n_x + S_{x,x} \mathbf{C} n_r \\ & \quad - S_r \mathbf{A} n_{x,x} - S_r \mathbf{B} n_{r,x} S_x \mathbf{B}_{,x} n_x + S_x \mathbf{C}_{,x} n_r \\ & \quad \left. - S_{r,x} \mathbf{A} n_x - S_{r,x} \mathbf{B} n_r + S_x \mathbf{B} n_{x,x} + S_x \mathbf{C} n_{r,x}) \right) \\ & - \left((-S_r \mathbf{A} n_x - S_r \mathbf{B} n_r + S_x \mathbf{B} n_x + S_x \mathbf{C} n_r) \right. \\ & \quad (-\mathbf{B}_{,x} n_x^2 - \mathbf{C} n_{x,x} n_r + \mathbf{A} n_x n_{r,x} + \mathbf{B}_{,x} n_r^2 \\ & \quad - \mathbf{B} n_{x,x} n_x - \mathbf{C}_{,x} n_x n_r + \mathbf{A}_{,x} n_x n_r + \mathbf{B} n_x n_{r,x} \\ & \quad \left. \left. - \mathbf{B} n_x n_{x,x} - \mathbf{C} n_x n_{r,x} + \mathbf{A} n_{x,x} n_r + \mathbf{B} n_{r,x} n_r \right) \right) \Bigg] \quad (\text{II.15}) \end{aligned}$$

$$p_{f,r} = 0 \quad (\text{II.16})$$

– Termes associés au champ de vitesses :

$$\mathbf{A} = 2 \frac{\partial u_f}{\partial x} \quad (\text{II.17})$$

$$\mathbf{A}_{,x} = 2 \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} \quad (\text{II.18})$$

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial u_f}{\partial r} + \frac{\partial v_f}{\partial x} \right) \quad (\text{II.19})$$

$$\mathbf{B}_{,x} = \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial r \partial x} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} \right) \quad (\text{II.20})$$

$$\mathbf{C} = 2 \frac{\partial v_f}{\partial r} \quad (\text{II.21})$$

$$\mathbf{C}_{,x} = 2 \frac{\partial^2 v_f}{\partial r \partial x} \quad (\text{II.22})$$

– Dérivées du champ de vitesses :

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} = 6r_{I_1}h \sin(2\pi x)\pi - 4\left[1 + h(1 - \cos(2\pi x))\right]h \sin(2\pi x)\pi \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{\partial u_f}{\partial r} = 3 + 3h(1 - \cos(2\pi x)) - 4r_{I_1} \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{\partial^2 u_f}{\partial r \partial x} = 3h \sin(2\pi x)2\pi - 4r_{I_1,x} \quad (\text{II.25})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} &= 6r_{I_1,x}h \sin(2\pi x)\pi + 12r_{I_1}h \cos(2\pi x)\pi^2 \\ &- 8\left[1 + h(1 - \cos(2\pi x))\right]h \cos(2\pi x)\pi^2 - 8h^2 \sin^2(2\pi x)\pi^2 \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_f}{\partial x} &= 4r_{I_1}h^2 \sin^2(2\pi x)\pi^2 \\ &+ 4r_{I_1}\left[1 + h(1 - \cos(2\pi x)) - r_{I_1}\right]h \cos(2\pi x)\pi^2 \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

$$\frac{\partial v_f}{\partial r} = 2\left[1 + h(1 - \cos(2\pi x)) - 2r_{I_1}\right]h \sin(2\pi x)\pi \quad (\text{II.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_f}{\partial r \partial x} &= 4\left[1 + h(1 - \cos(2\pi x)) - 2r_{I_1}\right]h \cos(2\pi x)\pi^2 \\ &+ 2\left(2h \sin(2\pi x)\pi - 2r_{I_1,x}\right)h \sin(2\pi x)\pi \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} &= 4r_{I_1,x}h^2 \sin^2(2\pi x)\pi^2 + 16r_{I_1}h^2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi x)\pi^3 \\ &+ 4r_{I_1,x}\left[1 + h(1 - \cos(2\pi x)) - r_{I_1}\right]h \cos(2\pi x)\pi^2 \\ &+ 4r_{I_1}\left[2h \sin(2\pi x)\pi - r_{I_1,x}\right]h \cos(2\pi x)\pi^2 \\ &- 8r_{I_1}\left[1 + h(1 - \cos(2\pi x)) - r_{I_1}\right]h \sin(2\pi x)\pi^3 \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

– Équation de l'interface dans la configuration déformée et sa dérivée :

$$r_{I_1} = 1 + h(1 - \cos(2\pi x)) \quad (\text{II.31})$$

$$r_{I_1,x} = 2h \sin(2\pi x)\pi \quad (\text{II.32})$$

– Expressions des normales et leurs dérivées :

$$n_x = -2h \sin(2\pi x)\pi \quad (\text{II.33})$$

$$n_{x,x} = -4h \cos(2\pi x)\pi^2 \quad (\text{II.34})$$

$$n_r = 1 \quad (\text{II.35})$$

$$n_{r,x} = 0 \quad (\text{II.36})$$

– Termes associés au champ de déplacements :

$$S_x = \sigma_{c_{xx}} n_x + \sigma_{c_{xr}} n_r \quad (\text{II.37})$$

$$S_{x,x} = \sigma_{c_{xx},x} n_x + \sigma_{c_{xr},x} n_r + \sigma_{c_{xx}} n_{x,x} + \sigma_{c_{xr}} n_{r,x} \quad (\text{II.38})$$

$$S_r = \sigma_{c_{rx}} n_x + \sigma_{c_{rr}} n_r \quad (\text{II.39})$$

$$S_{r,x} = \sigma_{c_{rx},x} n_x + \sigma_{c_{rr},x} n_r + \sigma_{c_{rx}} n_{x,x} + \sigma_{c_{rr}} n_{r,x} \quad (\text{II.40})$$

– Composantes du tenseur de Cauchy, $\bar{\bar{\sigma}}_c$, et ses dérivées :

$$\sigma_{c_{xx}} = \frac{1}{J} \left[F_{xx} (\sigma_{k_{xx}} F_{xx} + \sigma_{k_{xr}} F_{xr}) + F_{xr} (\sigma_{k_{rx}} F_{xx} + \sigma_{k_{rr}} F_{xr}) \right] \quad (\text{II.41})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{c_{xx},x} &= \frac{1}{J} \left[F_{xx} (\sigma_{k_{xx},x} F_{xx} + \sigma_{k_{xr},x} F_{xr} + \sigma_{k_{xx}} F_{xx,x} + \sigma_{k_{xr}} F_{xr,x}) \right. \\ &+ F_{xx,x} (\sigma_{k_{xx}} F_{xx} + \sigma_{k_{xr}} F_{xr}) \\ &+ F_{xr} (\sigma_{k_{rx},x} F_{xx} + \sigma_{k_{rr},x} F_{xr} + \sigma_{k_{rx}} F_{xx,x} + \sigma_{k_{rr}} F_{xr,x}) \\ &+ F_{xr,x} (\sigma_{k_{rx}} F_{xx} + \sigma_{k_{rr}} F_{xr}) \left. \right] \\ &- \frac{J_{,x}}{J^2} \left[F_{xx} (\sigma_{k_{xx}} F_{xx} + \sigma_{k_{xr}} F_{xr}) + F_{xr} (\sigma_{k_{rx}} F_{xx} + \sigma_{k_{rr}} F_{xr}) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

$$\sigma_{c_{xr}} = \frac{1}{J} \left[F_{xx} (\sigma_{k_{xx}} F_{rx} + \sigma_{k_{xr}} F_{rr}) + F_{xr} (\sigma_{k_{rx}} F_{rx} + \sigma_{k_{rr}} F_{rr}) \right] \quad (\text{II.43})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{c_{xr},x} &= \frac{1}{J} \left[F_{xx} (\sigma_{k_{xx},x} F_{rx} + \sigma_{k_{xr},x} F_{rr} + \sigma_{k_{xx}} F_{rx,x} + \sigma_{k_{xr}} F_{rr,x}) \right. \\ &+ F_{xx,x} (\sigma_{k_{xx}} F_{rx} + \sigma_{k_{xr}} F_{rr}) \\ &+ F_{xr} (\sigma_{k_{rx},x} F_{rx} + \sigma_{k_{rr},x} F_{rr} + \sigma_{k_{rx}} F_{rx,x} + \sigma_{k_{rr}} F_{rr,x}) \\ &+ F_{xr,x} (\sigma_{k_{rx}} F_{rx} + \sigma_{k_{rr}} F_{rr}) \left. \right] \\ &- \frac{J_{,x}}{J^2} \left[F_{xx} (\sigma_{k_{xx}} F_{rx} + \sigma_{k_{xr}} F_{rr}) + F_{xr} (\sigma_{k_{rx}} F_{rx} + \sigma_{k_{rr}} F_{rr}) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

$$\sigma_{c_{rx}} = \frac{1}{J} \left[F_{rx} (\sigma_{k_{xx}} F_{xx} + \sigma_{k_{xr}} F_{xr}) + F_{rr} (\sigma_{k_{rx}} F_{xx} + \sigma_{k_{rr}} F_{xr}) \right] \quad (\text{II.45})$$

$$\sigma_{c_{rx},x} = \frac{1}{J} \left[F_{rx} (\sigma_{k_{xx},x} F_{xx} + \sigma_{k_{xr},x} F_{xr} + \sigma_{k_{xx}} F_{xx,x} + \sigma_{k_{xr}} F_{xr,x}) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + F_{rx,x}(\sigma_{k_{xx}}F_{xx} + \sigma_{k_{xr}}F_{xr}) \\
& + F_{rr}(\sigma_{k_{rx},x}F_{xx} + \sigma_{k_{rr},x}F_{xr} + \sigma_{k_{rx}}F_{xx,x} + \sigma_{k_{rr}}F_{xr,x}) \\
& + F_{rr,x}(\sigma_{k_{rx}}F_{xx} + \sigma_{k_{rr}}F_{xr}) \Big] \\
& - \frac{J_{,x}}{J^2} \left[F_{rx}(\sigma_{k_{xx}}F_{xx} + \sigma_{k_{xr}}F_{xr}) + F_{rr}(\sigma_{k_{rx}}F_{xx} + \sigma_{k_{rr}}F_{xr}) \right] \quad (\text{II.46})
\end{aligned}$$

$$\sigma_{c_{rr}} = \frac{1}{J} \left[F_{rx}(\sigma_{k_{xx}}F_{rx} + \sigma_{k_{xr}}F_{rr}) + F_{rr}(\sigma_{k_{rx}}F_{rx} + \sigma_{k_{rr}}F_{rr}) \right] \quad (\text{II.47})$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{c_{rr},x} &= \frac{1}{J} \left[F_{rx}(\sigma_{k_{xx},x}F_{rx} + \sigma_{k_{xr},x}F_{rr} + \sigma_{k_{xx}}F_{rx,x} + \sigma_{k_{xr}}F_{rr,x}) \right. \\
& + F_{rx,x}(\sigma_{k_{xx}}F_{rx} + \sigma_{k_{xr}}F_{rr}) \\
& + F_{rr}(\sigma_{k_{rx},x}F_{rx} + \sigma_{k_{rr},x}F_{rr} + \sigma_{k_{rx}}F_{rx,x} + \sigma_{k_{rr}}F_{rr,x}) \\
& + F_{rr,x}(\sigma_{k_{rx}}F_{rx} + \sigma_{k_{rr}}F_{rr}) \Big] \\
& - \frac{J_{,x}}{J^2} \left[F_{rx}(\sigma_{k_{xx}}F_{rx} + \sigma_{k_{xr}}F_{rr}) + F_{rr}(\sigma_{k_{rx}}F_{rx} + \sigma_{k_{rr}}F_{rr}) \right] \quad (\text{II.48})
\end{aligned}$$

– Composantes du tenseur de Piola-Kirchoff, $\bar{\bar{\sigma}}_k$, et ses dérivées :

$$\sigma_{k_{xx}} = \lambda_s \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{xx} \quad (\text{II.49})$$

$$\sigma_{k_{xx},x} = \lambda_s \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}})_{,x} + \mu_s E_{xx,x} \quad (\text{II.50})$$

$$\sigma_{k_{xr}} = \lambda_s \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{xr} \quad (\text{II.51})$$

$$\sigma_{k_{xr},x} = \lambda_s \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}})_{,x} + \mu_s E_{xr,x} \quad (\text{II.52})$$

$$\sigma_{k_{rx}} = \lambda_s \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{rx} \quad (\text{II.53})$$

$$\sigma_{k_{rx},x} = \lambda_s \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}})_{,x} + \mu_s E_{rx,x} \quad (\text{II.54})$$

$$\sigma_{k_{rr}} = \lambda_s \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{rr} \quad (\text{II.55})$$

$$\sigma_{k_{rr},x} = \lambda_s \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{E}}})_{,x} + \mu_s E_{rr,x} \quad (\text{II.56})$$

– Expression du Jacobien et de sa dérivée :

$$J = F_{\theta\theta} (F_{xx}F_{rr} - F_{xr}F_{rx}) \quad (\text{II.57})$$

$$J_{,x} = F_{\theta\theta} (F_{xx,x}F_{rr} - F_{xr,x}F_{rx} + F_{xx}F_{rr,x} - F_{xr}F_{rx,x}) \quad (\text{II.58})$$

$$+ F_{\theta\theta,x} (F_{xx}F_{rr} - F_{xr}F_{rx}) \quad (\text{II.59})$$

– Composantes de la matrice de passage, $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$, et ses dérivées :

$$F_{xx} = 1 + h_{xx} \quad (\text{II.60})$$

$$F_{xx,x} = h_{xx,x} \quad (\text{II.61})$$

$$F_{xr} = h_{xr} \quad (\text{II.62})$$

$$F_{xr,x} = h_{xr,x} \quad (\text{II.63})$$

$$F_{rx} = h_{rx} \quad (\text{II.64})$$

$$F_{rx,x} = h_{rx,x} \quad (\text{II.65})$$

$$F_{rr} = 1 + h_{rr} \quad (\text{II.66})$$

$$F_{rr,x} = h_{rr,x} \quad (\text{II.67})$$

$$F_{\theta\theta} = 1 + h_{\theta\theta} \quad (\text{II.68})$$

$$F_{\theta\theta,x} = h_{\theta\theta,x} \quad (\text{II.69})$$

– Propriétés physiques du solide :

$$\begin{aligned} E = 2 & \quad \lambda_s = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0.227 \\ \nu = 0.1 & \quad \mu_s = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0.90 \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

– Opérateur trace sur le tenseur des déformations de Green-Lagrange, $\overline{\overline{\mathbf{h}}}$, et sa dérivée :

$$tr(\overline{\overline{\mathbf{E}}}) = E_{xx} + E_{rr} + E_{\theta\theta} \quad (\text{II.71})$$

$$tr(\overline{\overline{\mathbf{E}}})_{,x} = E_{xx,x} + E_{rr,x} + E_{\theta\theta,x} \quad (\text{II.72})$$

– Composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange, $\overline{\overline{\mathbf{h}}}$, et ses dérivées :

$$E_{xx} = \frac{1}{2} (h_{xx} + h_{xx}) + \frac{1}{2} (h_{xx}h_{xx} + h_{rx}h_{rx}) \quad (\text{II.73})$$

$$E_{xx,x} = \frac{1}{2} (h_{xx,x} + h_{xx,x}) + h_{xx}h_{xx,x} + h_{rx}h_{rx,x} \quad (\text{II.74})$$

$$E_{xr} = \frac{1}{2} (h_{rx} + h_{xr}) + \frac{1}{2} (h_{xx}h_{xr} + h_{rx}h_{rr}) \quad (\text{II.75})$$

$$E_{xr,x} = \frac{1}{2} (h_{rx,x} + h_{xr,x}) + \frac{1}{2} (h_{xx,x}h_{xr} + h_{xx}h_{xr,x} + h_{rx,x}h_{rr} + h_{rx}h_{rr,x}) \quad (\text{II.76})$$

$$E_{rx} = \frac{1}{2} (h_{xr} + h_{rx}) + \frac{1}{2} (h_{xr}h_{xx} + h_{rr}h_{rx}) \quad (\text{II.77})$$

$$E_{rx,x} = \frac{1}{2} (h_{xr,x} + h_{rx,x}) + \frac{1}{2} (h_{xr,x}h_{xx} + h_{xr}h_{xx,x} + h_{rr,x}h_{rx} + h_{rr}h_{rx,x}) \quad (\text{II.78})$$

$$E_{rr} = \frac{1}{2} (h_{rr} + h_{rr}) + \frac{1}{2} (h_{xr}h_{xr} + h_{rr}h_{rr}) \quad (\text{II.79})$$

$$E_{rr,x} = \frac{1}{2} (h_{rr,x} + h_{rr,x}) + h_{xr}h_{xr,x} + h_{rr}h_{rr,x} \quad (\text{II.80})$$

$$E_{\theta\theta} = \frac{1}{2} (h_{\theta\theta} + h_{\theta\theta}) + \frac{1}{2} (h_{\theta\theta}h_{\theta\theta}) \quad (\text{II.81})$$

$$E_{\theta\theta,x} = \frac{1}{2} (h_{\theta\theta,x} + h_{\theta\theta,x}) + h_{\theta\theta}h_{\theta\theta,x} \quad (\text{II.82})$$

– Composantes du tenseur gradient des déformations, $\bar{\mathbf{h}}$, et ses dérivées :

$$h_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.83})$$

$$h_{xx,x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II.84})$$

$$h_{xr} = \frac{\partial \xi}{\partial r} = -\frac{1}{4} \quad (\text{II.85})$$

$$h_{xr,x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial x} = 0 \quad (\text{II.86})$$

$$h_{rx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2(2 - r_{I_0})h \sin(2\pi x)\pi \quad (\text{II.87})$$

$$h_{rx,x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 2r_{I_0,x}h \sin(2\pi x)\pi + 4(2 - r_{I_0})h \cos(2\pi x)\pi^2 \quad (\text{II.88})$$

$$h_{rr} = \frac{\partial \eta}{\partial r} = -h(1 - \cos(2\pi x)) \quad (\text{II.89})$$

$$h_{rr,x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial r \partial x} = -2h \sin(2\pi x)\pi \quad (\text{II.90})$$

$$h_{\theta\theta} = \frac{\eta}{r} = \frac{(2 - r_{I_0})h(1 - \cos(2\pi x))}{r_{I_0}} \quad (\text{II.91})$$

$$\begin{aligned} h_{\theta\theta,x} &= \frac{\eta - r\eta_{,x}}{r^2} = \frac{1}{r_{I_0}^2} \left[r_{I_0} \left(2(2 - r_{I_0})h \sin(2\pi x)\pi \right. \right. \\ &\quad - \left. \left. r_{I_0,x}h(1 - \cos(2\pi x)) \right) \right. \\ &\quad \left. - (2 - r_{I_0})h(1 - \cos(2\pi x))r_{I_0,x} \right] \quad (\text{II.92}) \end{aligned}$$

– Équation de l'interface dans la configuration non déformée et sa dérivée :

$$r_{I_0} = 1 \quad (\text{II.93})$$

$$r_{I_0,x} = 0 \quad (\text{II.94})$$

Termes sources pour le solide

On rappelle les expressions des termes sources pour le solide :

$$f_x^s = - \left(\frac{\partial \sigma_{l_{xx}}}{\partial x} + \frac{\sigma_{l_{xr}}}{r} + \frac{\partial \sigma_{l_{xr}}}{\partial r} \right) \quad (\text{II.95})$$

$$f_r^s = - \left(\frac{\partial \sigma_{l_{rx}}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{l_{rr}}}{\partial r} + \frac{\sigma_{l_{rr}} - \sigma_{l_{\theta\theta}}}{r} \right) \quad (\text{II.96})$$

On définit et développe chacun des termes présents dans les expression des termes sources :

– Composantes du tenseur de Piola-Lagrange, $\bar{\bar{\sigma}}_l$, et ses dérivées :

$$\sigma_{l_{xx},x} = F_{xx,x}\sigma_{k_{xx}} + F_{xr,x}\sigma_{k_{rx}} + F_{xx}\sigma_{k_{xx},x} + F_{xr}\sigma_{k_{rx},x} \quad (\text{II.97})$$

$$\sigma_{l_{xr}} = F_{xx}\sigma_{k_{xr}} + F_{xr}\sigma_{k_{rr}} \quad (\text{II.98})$$

$$\sigma_{l_{xr},r} = F_{xx,r}\sigma_{k_{xr}} + F_{xr,r}\sigma_{k_{rr}} + F_{xx}\sigma_{k_{xr},r} + F_{xr}\sigma_{k_{rr},r} \quad (\text{II.99})$$

$$\sigma_{l_{rx},x} = F_{rx,x}\sigma_{k_{xx}} + F_{rr,x}\sigma_{k_{rx}} + F_{rx}\sigma_{k_{xx},x} + F_{rr}\sigma_{k_{rx},x} \quad (\text{II.100})$$

$$\sigma_{l_{rr}} = F_{rx}\sigma_{k_{xr}} + F_{rr}\sigma_{k_{rr}} \quad (\text{II.101})$$

$$\sigma_{l_{rr},r} = F_{rx,r}\sigma_{k_{xr}} + F_{rr,r}\sigma_{k_{rr}} + F_{rx}\sigma_{k_{xr},r} + F_{rr}\sigma_{k_{rr},r} \quad (\text{II.102})$$

$$\sigma_{l_{\theta\theta}} = F_{\theta\theta}\sigma_{k_{\theta\theta}} \quad (\text{II.103})$$

– Composantes de la matrice de passage, $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$, et ses dérivées :

$$F_{xx} = 1 + h_{xx} \quad (\text{II.104})$$

$$F_{xx,x} = h_{xx,x} \quad (\text{II.105})$$

$$F_{xx,r} = h_{xx,r} \quad (\text{II.106})$$

$$F_{xr} = h_{xr} \quad (\text{II.107})$$

$$F_{xr,x} = h_{xr,x} \quad (\text{II.108})$$

$$F_{xr,r} = h_{xr,r} \quad (\text{II.109})$$

$$F_{rx} = h_{rx} \quad (\text{II.110})$$

$$F_{rx,x} = h_{rx,x} \quad (\text{II.111})$$

$$F_{rx,r} = h_{rx,r} \quad (\text{II.112})$$

$$F_{rr} = 1 + h_{rr} \quad (\text{II.113})$$

$$F_{rr,x} = h_{rr,x} \quad (\text{II.114})$$

$$F_{rr,r} = h_{rr,r} \quad (\text{II.115})$$

$$F_{\theta\theta} = 1 + h_{\theta\theta} \quad (\text{II.116})$$

– Composantes du tenseur de Piola-Kirchoff, $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_k$, et ses dérivées :

$$\sigma_{k_{xx}} = \lambda_s tr(\overline{\overline{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{xx} \quad (\text{II.117})$$

$$\sigma_{k_{xx},x} = \lambda_s tr(\overline{\overline{\mathbf{E}}})_{,x} + \mu_s E_{xx,x} \quad (\text{II.118})$$

$$\sigma_{k_{xr}} = \lambda_s tr(\overline{\overline{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{xr} \quad (\text{II.119})$$

$$\sigma_{k_{xr},r} = \lambda_s tr(\overline{\overline{\mathbf{E}}})_{,r} + \mu_s E_{xr,r} \quad (\text{II.120})$$

$$\sigma_{k_{rx}} = \lambda_s tr(\bar{\bar{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{rx} \quad (\text{II.121})$$

$$\sigma_{k_{rx},x} = \lambda_s tr(\bar{\bar{\mathbf{E}}})_{,x} + \mu_s E_{rx,x} \quad (\text{II.122})$$

$$\sigma_{k_{rr}} = \lambda_s tr(\bar{\bar{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{rr} \quad (\text{II.123})$$

$$\sigma_{k_{rr},r} = \lambda_s tr(\bar{\bar{\mathbf{E}}})_{,r} + \mu_s E_{rr,r} \quad (\text{II.124})$$

$$\sigma_{k_{\theta\theta}} = \lambda_s tr(\bar{\bar{\mathbf{E}}}) + \mu_s E_{\theta\theta} \quad (\text{II.125})$$

– Propriétés physiques du solide :

$$\begin{aligned} E = 2 & \quad \Rightarrow \quad \lambda_s = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0.227 \\ \nu = 0.1 & \quad \mu_s = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0.90 \end{aligned} \quad (\text{II.126})$$

– Opérateur trace sur le tenseur des déformations de Green-Lagrange, $\bar{\bar{\mathbf{h}}}$, et sa dérivée :

$$tr(\bar{\bar{\mathbf{E}}}) = E_{xx} + E_{rr} + E_{\theta\theta} \quad (\text{II.127})$$

$$tr(\bar{\bar{\mathbf{E}}})_{,x} = E_{xx,x} + E_{rr,x} + E_{\theta\theta,x} \quad (\text{II.128})$$

– Composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange, $\bar{\bar{\mathbf{h}}}$, et ses dérivées :

$$E_{xx} = \frac{1}{2} (h_{xx} + h_{xx}) + \frac{1}{2} (h_{xx}h_{xx} + h_{rx}h_{rx}) \quad (\text{II.129})$$

$$E_{xx,x} = \frac{1}{2} (h_{xx,x} + h_{xx,x}) + h_{xx}h_{xx,x} + h_{rx}h_{rx,x} \quad (\text{II.130})$$

$$E_{xr} = \frac{1}{2} (h_{rx} + h_{xr}) + \frac{1}{2} (h_{xx}h_{xr} + h_{rx}h_{rr}) \quad (\text{II.131})$$

$$\begin{aligned} E_{xr,r} &= \frac{1}{2} (h_{rx,r} + h_{xr,r}) \\ &+ \frac{1}{2} (h_{xx,r}h_{xr} + h_{xx}h_{xr,r} + h_{rx,r}h_{rr} + h_{rx}h_{rr,r}) \end{aligned} \quad (\text{II.132})$$

$$E_{rx} = \frac{1}{2} (h_{xr} + h_{rx}) + \frac{1}{2} (h_{xr}h_{xx} + h_{rr}h_{rx}) \quad (\text{II.133})$$

$$\begin{aligned} E_{rx,x} &= \frac{1}{2} (h_{xr,x} + h_{rx,x}) \\ &+ \frac{1}{2} (h_{xr,x}h_{xx} + h_{xr}h_{xx,x} + h_{rr,x}h_{rx} + h_{rr}h_{rx,x}) \end{aligned} \quad (\text{II.134})$$

$$E_{rr} = \frac{1}{2} (h_{rr} + h_{rr}) + \frac{1}{2} (h_{xr} h_{xr} + h_{rr} h_{rr}) \quad (\text{II.135})$$

$$E_{\theta\theta} = \frac{1}{2} (h_{\theta\theta} + h_{\theta\theta}) + \frac{1}{2} (h_{\theta\theta} h_{\theta\theta}) \quad (\text{II.136})$$

– Composantes du tenseur gradient des déformations, $\bar{\mathbf{h}}$, et ses dérivées :

$$h_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.137})$$

$$h_{xx,x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.138})$$

$$h_{xx,r} = \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.139})$$

$$h_{xr} = \frac{\partial \xi}{\partial r} = -\frac{1}{4} \quad (\text{II.140})$$

$$h_{xr,x} = \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.141})$$

$$h_{xr,r} = \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.142})$$

$$h_{rx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2(2-r)h \sin(2\pi x)\pi \quad (\text{II.143})$$

$$h_{rx,x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 4(2-r)h \cos(2\pi x)\pi^2 \quad (\text{II.144})$$

$$h_{rx,r} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = -2h \sin(2\pi x)\pi \quad (\text{II.145})$$

$$h_{rr} = \frac{\partial \eta}{\partial r} = -h(1 - \cos(2\pi x)) \quad (\text{II.146})$$

$$h_{rr,x} = \frac{\partial \eta}{\partial r} = -2h \sin(2\pi x)\pi \quad (\text{II.147})$$

$$h_{rr,r} = \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.148})$$

$$h_{\theta\theta} = \frac{\eta}{r} = \frac{(2-r)h(1 - \cos(2\pi x))}{r} \quad (\text{II.149})$$